



**11. proljetni seminar za geografe (međuzupanijski stručni skup)**

**„Šljunak, pijesak i glina u Hrvatskoj – važne mineralne sirovine u građevinarstvu”**

**1. IV. 2026.**

**Geomatematičke metode u istraživanju  
nevezanih taložina – šljunaka, pijesaka i glina**

# UVOD

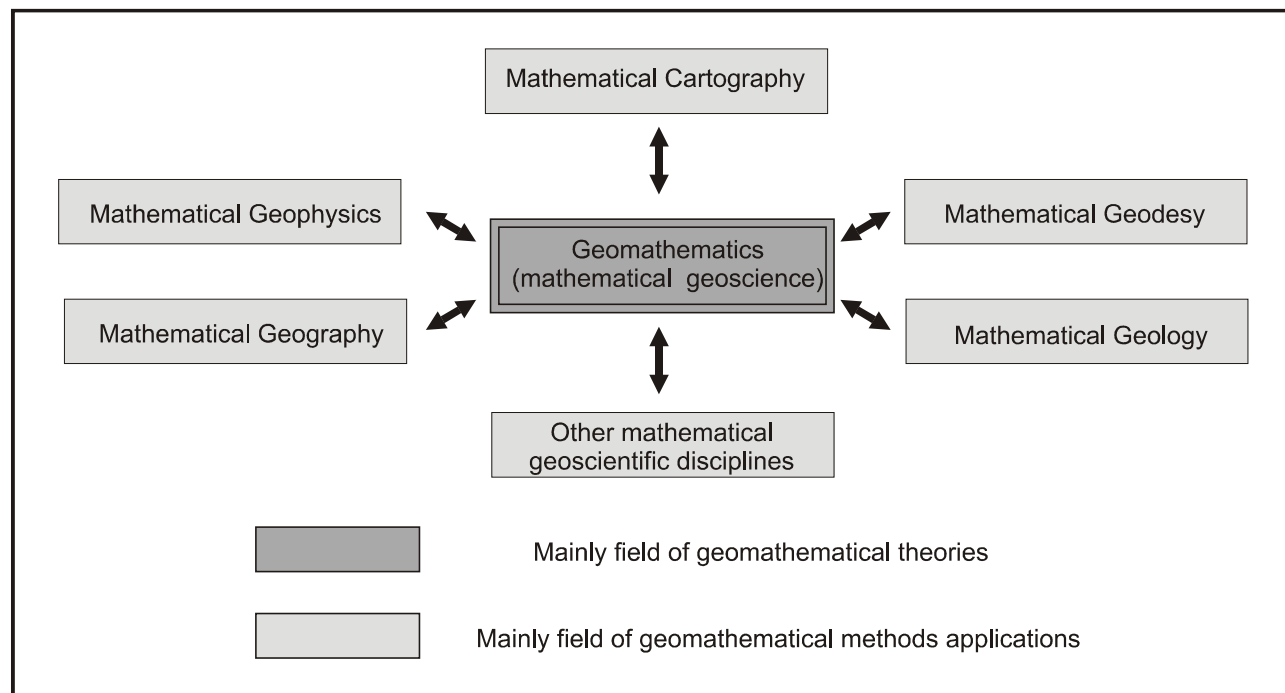


Geomatematika je znanstveno polje smješteno između matematike i skupine geoznanosti. Kod rangiranja ponekad se smatraju skupinom matematičkih metoda primijenjenih u jednom ili više polja koja se ubrajaju u geoznanosti, no uglavnom se smatra zasebnom geoznanošću. U Hrvatskoj je iznimno dobro razvijena svojom primjenom i hrvatskim nazivljem unutar geologije.

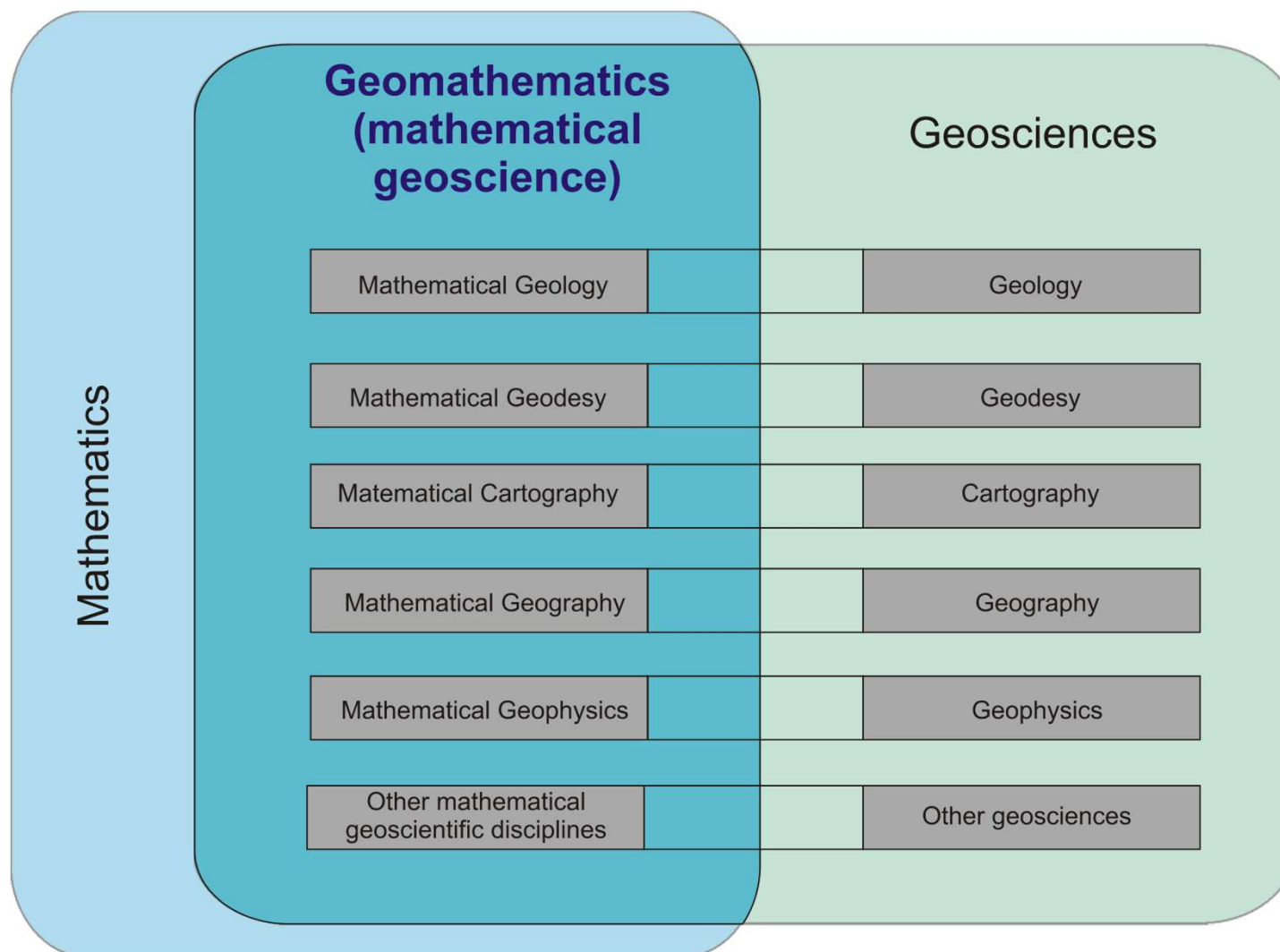
Geografija, svojom dvojakošću, samo dijelom pripada u geoznanosti. Dugo vremena njezin prirodoslovni dio, fizička geografija, bio je u geoznanostima, dok je socijalna geografija bila svrstana u interdisciplinarno područje. Nove promjene i tendencije danas su u Hrvatskoj cijelu geografiju svrstale u prirodoslovno područje, pa time i u geoznanosti.

Danas, u Hrvatskoj, geomatematikom se smatra skup metoda primijenjenih u bilo kojoj geoznanosti koje se dijele u tri skupine:

- primijenjenu klasičnu statistiku;
- geostatistiku;
- primijenjene algoritme neuronskih mreža.



**Slika 1:** Odnos između geomatematike i “matematičkih” dijelova geoznanosti (iz Lapaine i Malvić, 2009)



**Slika 2:** Odnos između matematike, geomatematike i geoznanosti (iz Lapaine i Malvić, 2009)

# Predviđanje šupljikavosti linearnom interpolacijom i neuronskim algoritmom u pješčenjacima (neogen, srednji miocen)

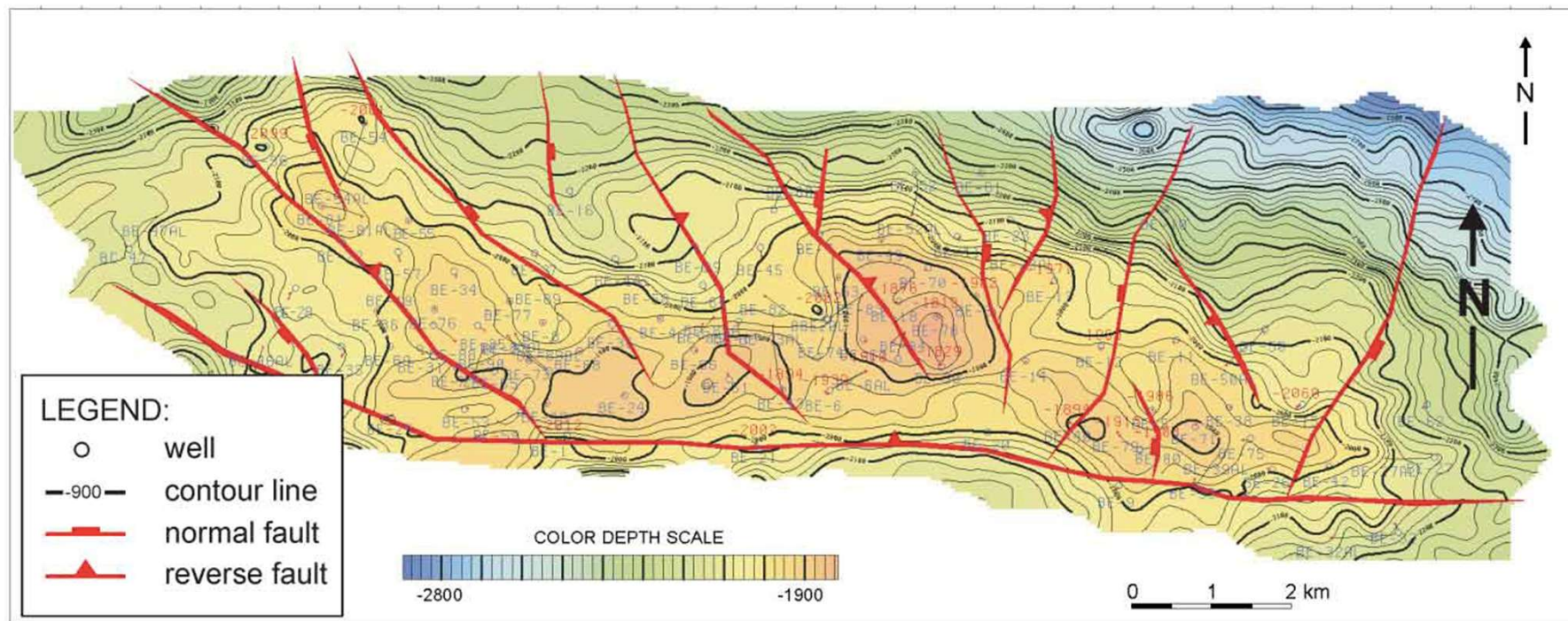


Primjer polja Beničanci nije primjer nevezanih taložina. Međutim zbog sličnosti s kartiranjem šupljikavosti u pijescima i šljuncima iz točkastih podataka može se asocijativno povezati s takvom namjenom.

Primjer je zanimljiv jer prikazuje dvojaki pristup stvarnim podacima. Prvi skup je znatno preciznije izmjeren, no malobrojan. Drugi je znatno nesigurniji, stohastičan, višeznačan u prepoznavanju litologije, no znatno brojniji.

Prvi skup uključuje 13 seizmičkih vrijednosti 3 varijable (amplituda, frekvencija, faza) te šupljikavosti (karotažna) osrednjenih na smjestištima 13 bušotina.

Drugi skup ima seizmičke sirove podatke (tih triju geofizičkih varijabli) u znatno većoj mreži, koja prekriva područje na kojem su i tih 13 bušotina, s ukupno 16384 vrijednosti.



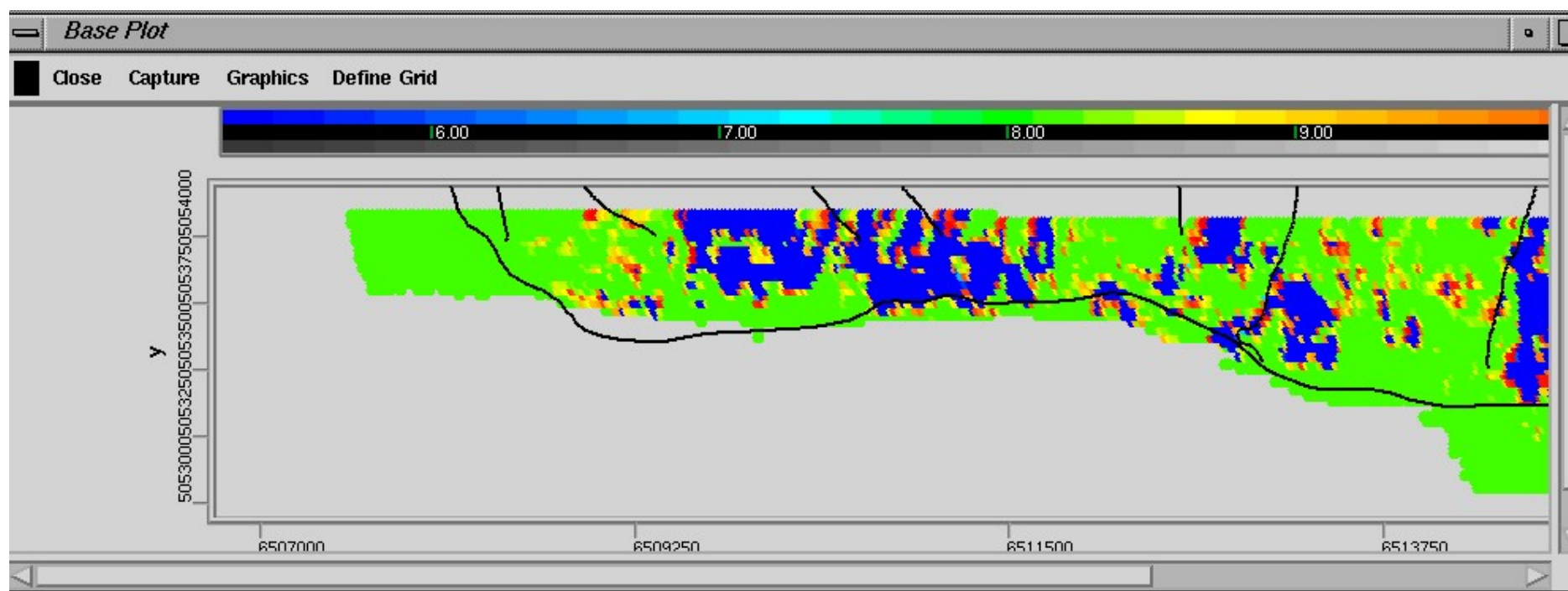
**Slika 3:** Karta paleoreljefa polja Beničanci (iz Futivić i Pleić, 2002). Iznad paleoreljefa slijedi baden, s prevladavajućim krupnim klastitima (ovdje kartirane Beničanske breče), tj. neogenski slijed vezanih taložina.



Kvaliteta neuronske mreže ocijenjena je iz korelacije između šupljikavosti i atributa te kriterija konvergencije algoritma povratne veze. Što je on manji mreža je bolje uvježbana. Najbolje uvježbavanje dobiveno je kod usporedbe zbirno sva tri atributa (sintetski atribut) sa šupljikavošću:

amplituda + frekvencija + faze = šupljikavost -  $R^2=0.987$  ;  $\Sigma\varepsilon^2=0,329$ .

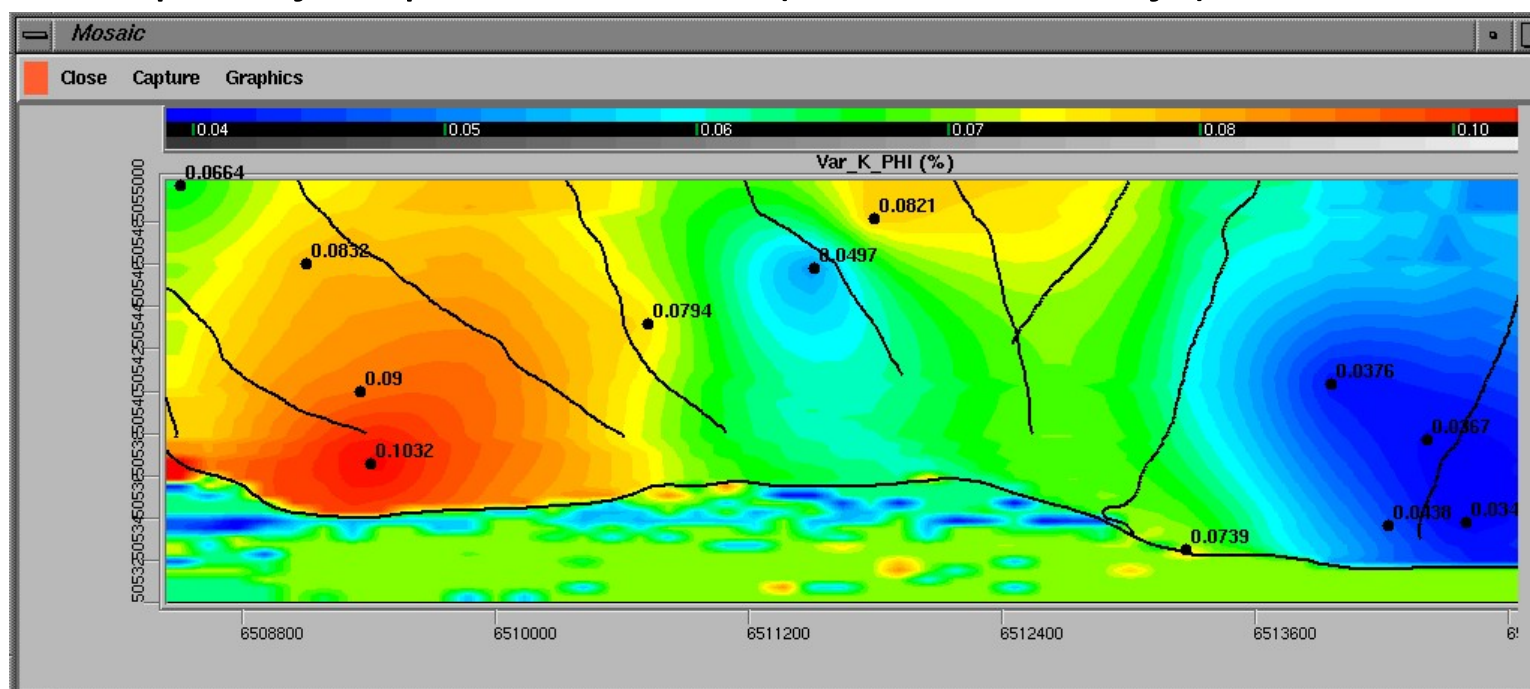
Izmjerene vrijednosti nalaze se u intervalu 5,27-11,06 %, a time i procjena „pada” unutar istoga raspona. Svojstvo neuronske procjene je da jače teži osrednjavanju, tj. manje su varijacije u području između mjerenja oko aritmetičke sredine, negoli kod većine algoritama linearne interpolacije.



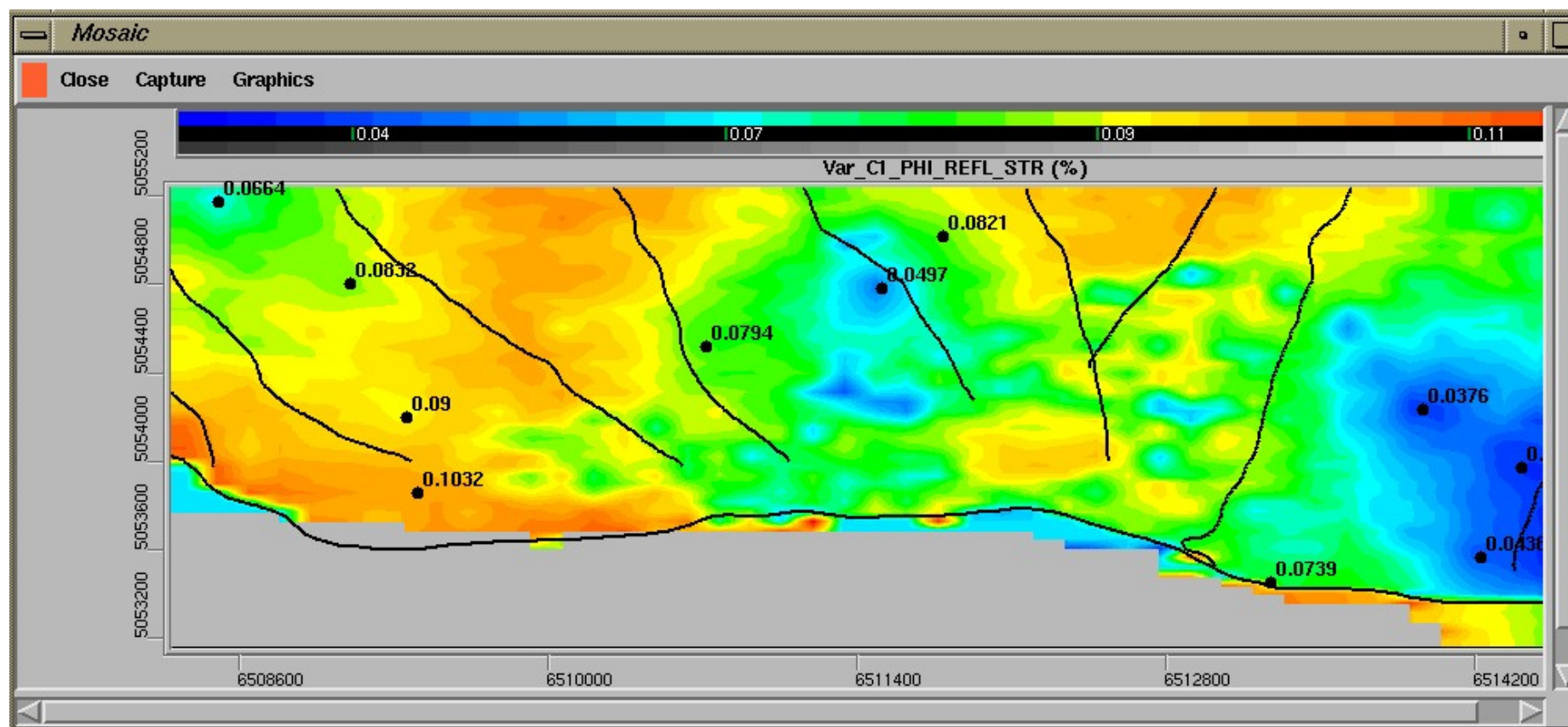
**Slika 4:** Karta šupljikavosti polja Beničanci dobivena neuronskim algoritmom (iz Malvić i Prskalo, 2007).

*Plavo su manje, crveno veće vrijednosti. Eksperimentalna karta.*

Korisno je usporediti neuronsku kartu s onom dobivenom interpolacijom samo pouzdanih 13 vrijednosti (autokorelacija) te kartu gdje je tih 13 vrijednosti „ojačano” seizmičkim atributom na spomenutih 16384 mjesta unutar interpolacijske pravilne mreže (obična korelacija).



**Slika 5:** Karta šupljikavosti polja Beničanci dobivena običnim krigiranjem (iz Malvić i Đureković, 2003).  
Plavo su manje, crveno veće vrijednosti.



**Slika 6:** Karta šupljikavosti polja Beničanci dobivena ko-krigiranjem (iz Malvić i Đureković, 2003). Plavo su manje, crveno veće vrijednosti.



---

Linearno kartiranje, kao osnovni pristup, dalo je dva rezultata, oba lako interpretabilna - karte običnoga krigiranja i ko-krigiranja.

Postojanje sekundarne varijable, fizikalnoga svojstva, pokazalo je da karta može biti znatno poboljšanja, posebno u područjima udaljenijim od mjerenih vrijednosti – to je karta kokrigiranja.

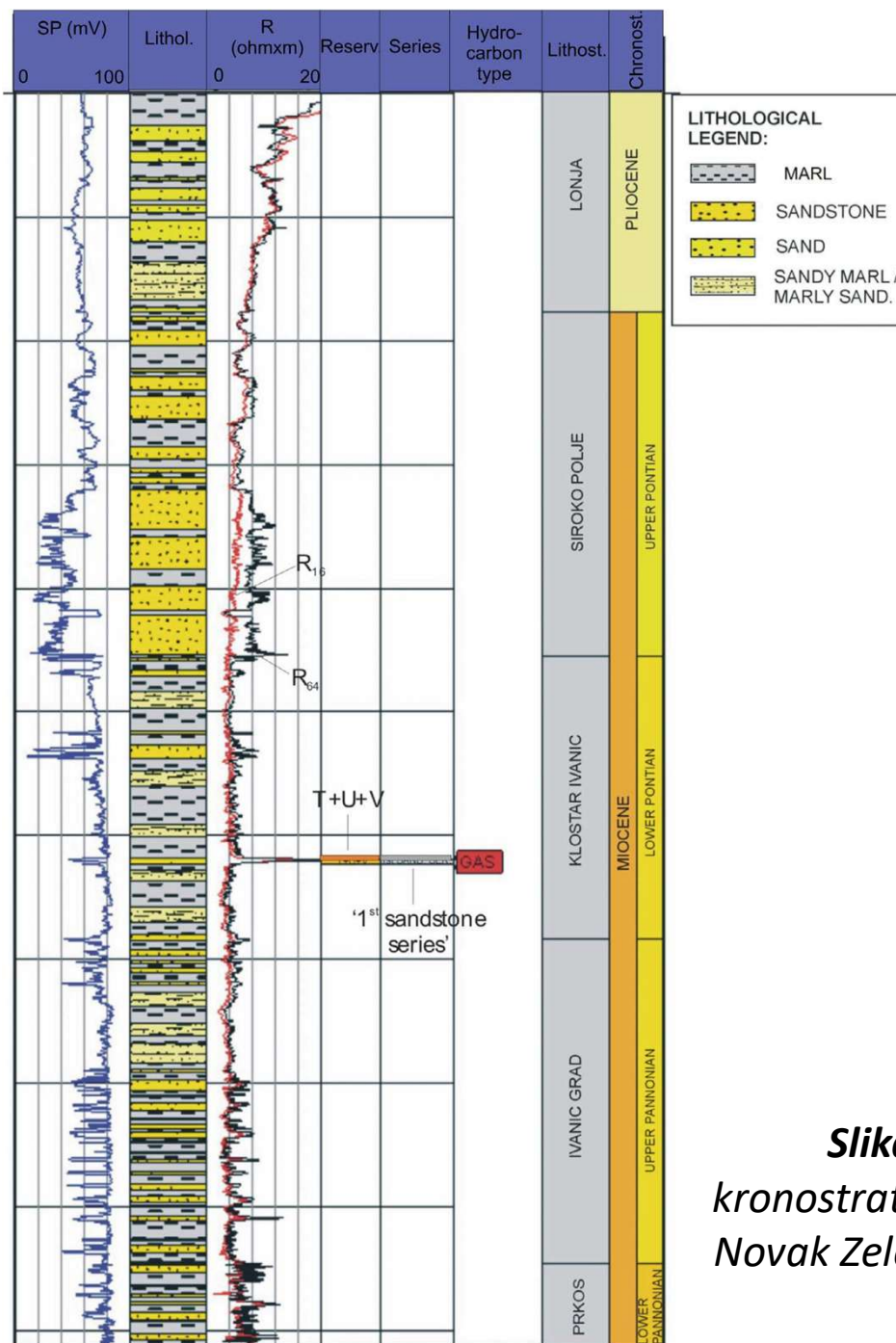
Kao treća mogućnost pojavila se primjena neuronskog algoritma, jer je podešavanjem dobiven visok koeficijent korelacije uspoređenih prvotnih i drugotnih varijabli, dok je kriterij konvergencije mreže dosegao vrlo malu vrijednost minimuma. Uz takve postavke karta neuronske mreže može se bez problema usporediti s ko-krigiranjem i provjeriti mogućnost da predstavlja čak i primjerenije rješenje razdiobe šupljikavosti u pješčenjaku.

# Kartiranje stohastičkim simulacijama u pješčenjaku (neogen, gornji miocen)



Napredni prostorni prikazi varijabli u pješčenjacima/pijescima (te drugim klastitima) temelje se i na simulacijama. Njihova prednost (ujedno i interpretacijska mana) je dobivanje niza rješenja za jedan te isti skup podataka.

Primjer ovdje je analiza načinjena u neogenskim pješčenjacima (donji pont) formacije Kloštar Ivanić u Savskoj depresiji, na polju Kloštar. U tom specifičnom sloju (ležište „T”) prikupljeni su podatci o šupljikavosti, debljini i dubini sloja. Svi su kartirani algoritmom sekvencijskih Gaussovih simulacija (SGS).



**Slika 7:** Geološki stup (e-karotažni, litološki, lito- i kronostratigrafski) s prikazanim istraživanim pješčenjakom (iz Novak Zelenika i Malvić, 2013). Raspon je od donjega panona do pliocena.

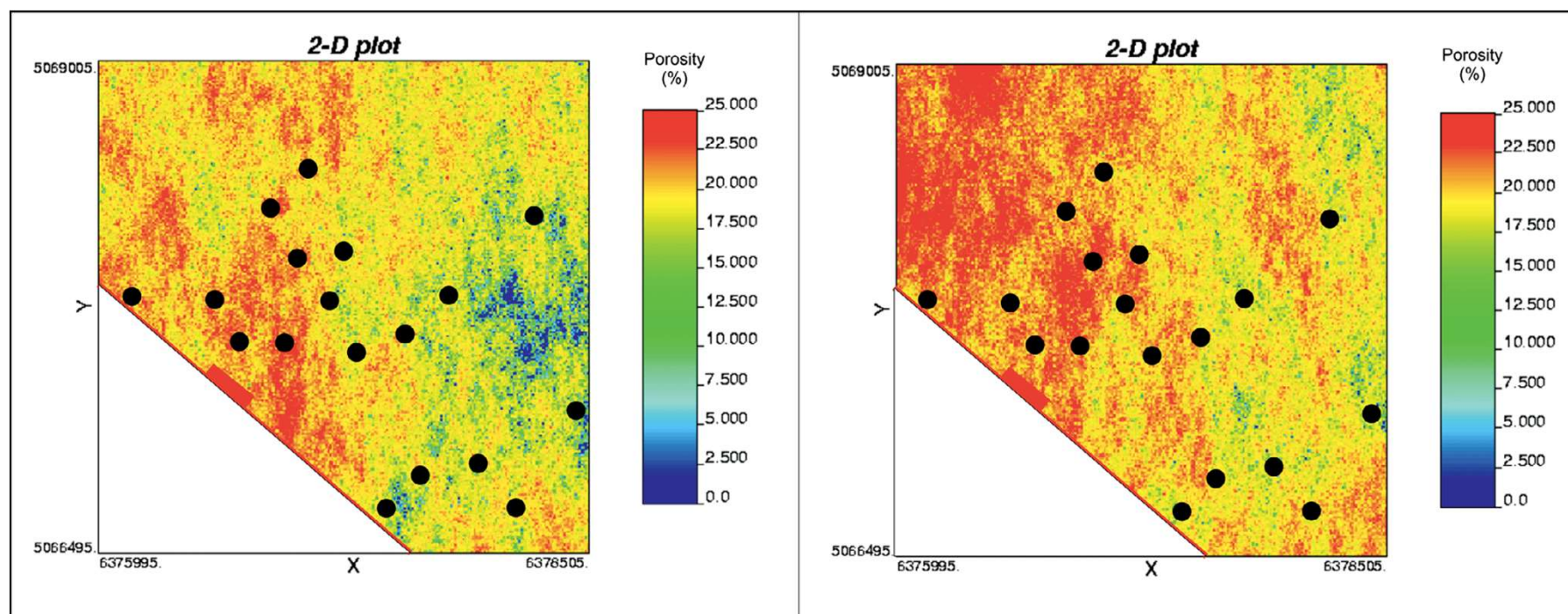


SGS algoritam je primijenjen na stijene predstavljene srednjozrnatim pješčenjacima s vrlo malim udjelom čestica gline te laporima u njihovoj krovini i podini. Kartiranje dubine, debljine i šupljikavosti omogućilo je izračuna pomaka uz rasjed, stratigrafskog položaja tog događaja te njegovog utjecaja na razvoj drugotne šupljikavosti.

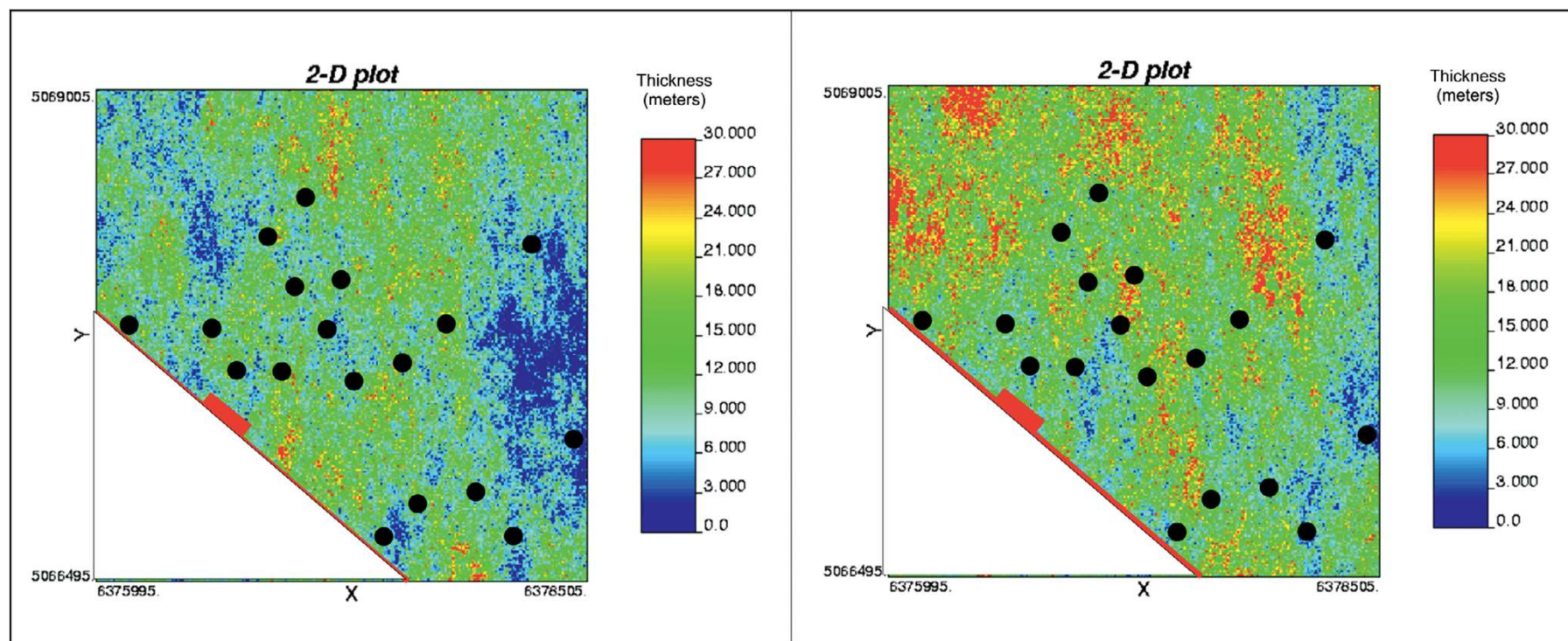
Kako bi se bolje interpretirao i taložni okoliš (orijentacija kanala) uporabljen je i algoritam sekvencijskih indikatorskih simulacija (SIS) uz postavljanje graničnih vrijednosti na šupljikavost. Ta je varijable bila odabrana da svojim iznosom opisuje čiste pješčenjake ili one s određenim udjelom čestica silta i gline (silti i glinoviti pješčenjaci).



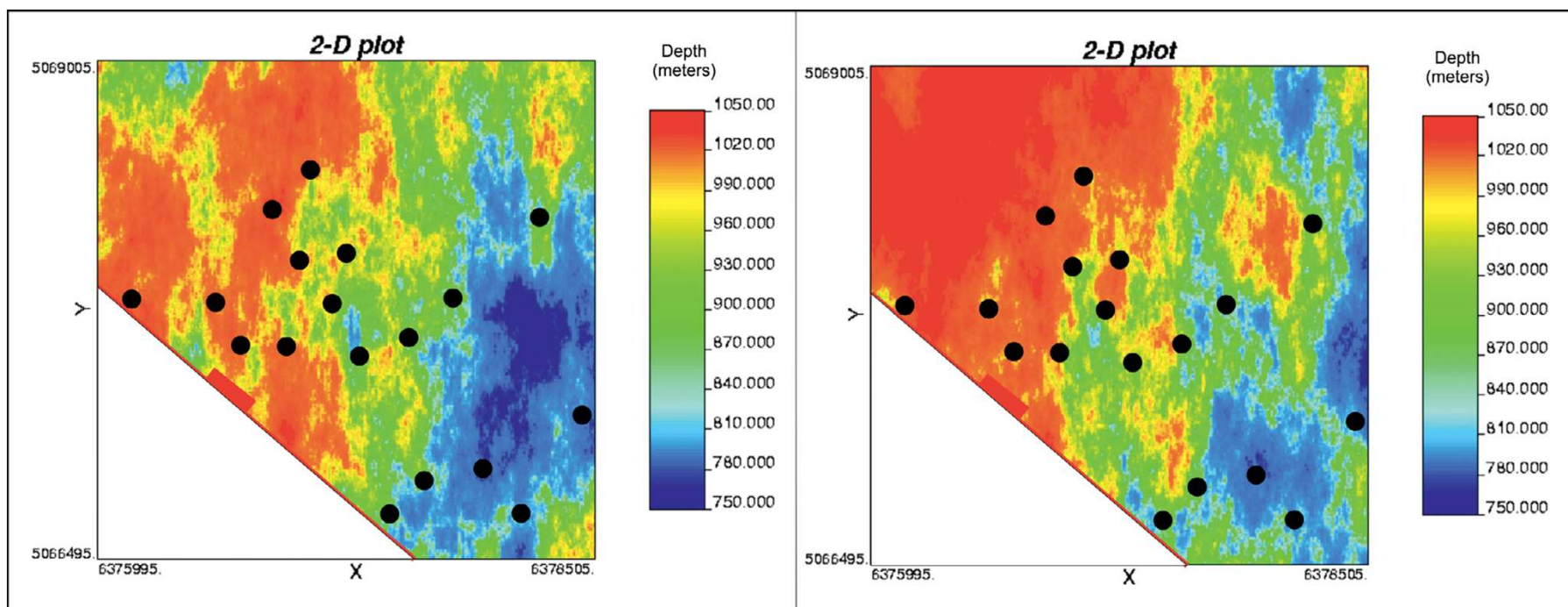
To je tražilo pretvorbu stvarnih u kategoričke vrijednosti, odnosno izmjereni podatci su pretvoreni u vrijednosti 0 i 1. Ukupno je načinjeno po 100 simulacija za svaku od 3 varijable i to zasebno SGS-om i SIS-om. Kao reprezentativne odabrane su 1. i 100. simulacija u tom nizu, a mogla je biti i bilo koja druga. Sve su jednako vjerojatne („istinite”).



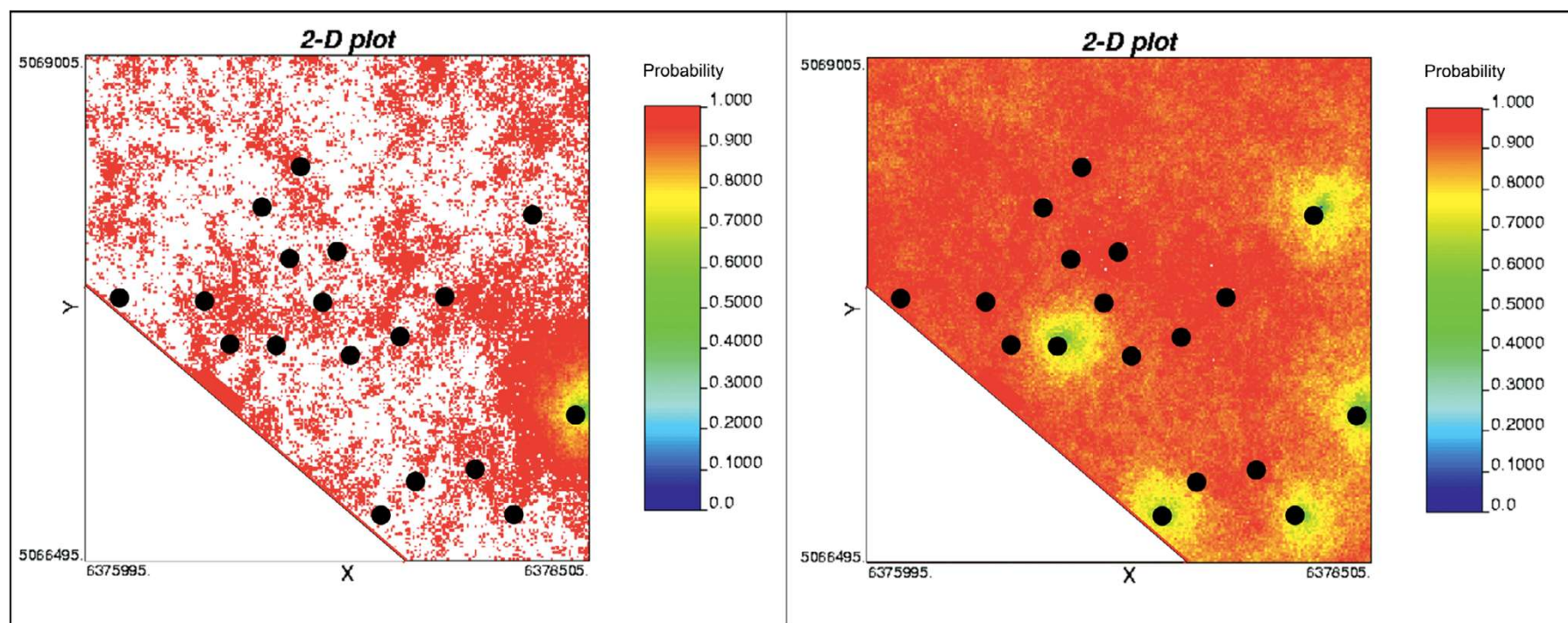
**Slika 8:** Karta šupljikavosti polja Kloštar (ležište T) dobivena SGS-om; 1. realizacija lijevo, 100. desno; vrijednosti 0-25 % (iz Novak Zelenika i Malvić, 2013)



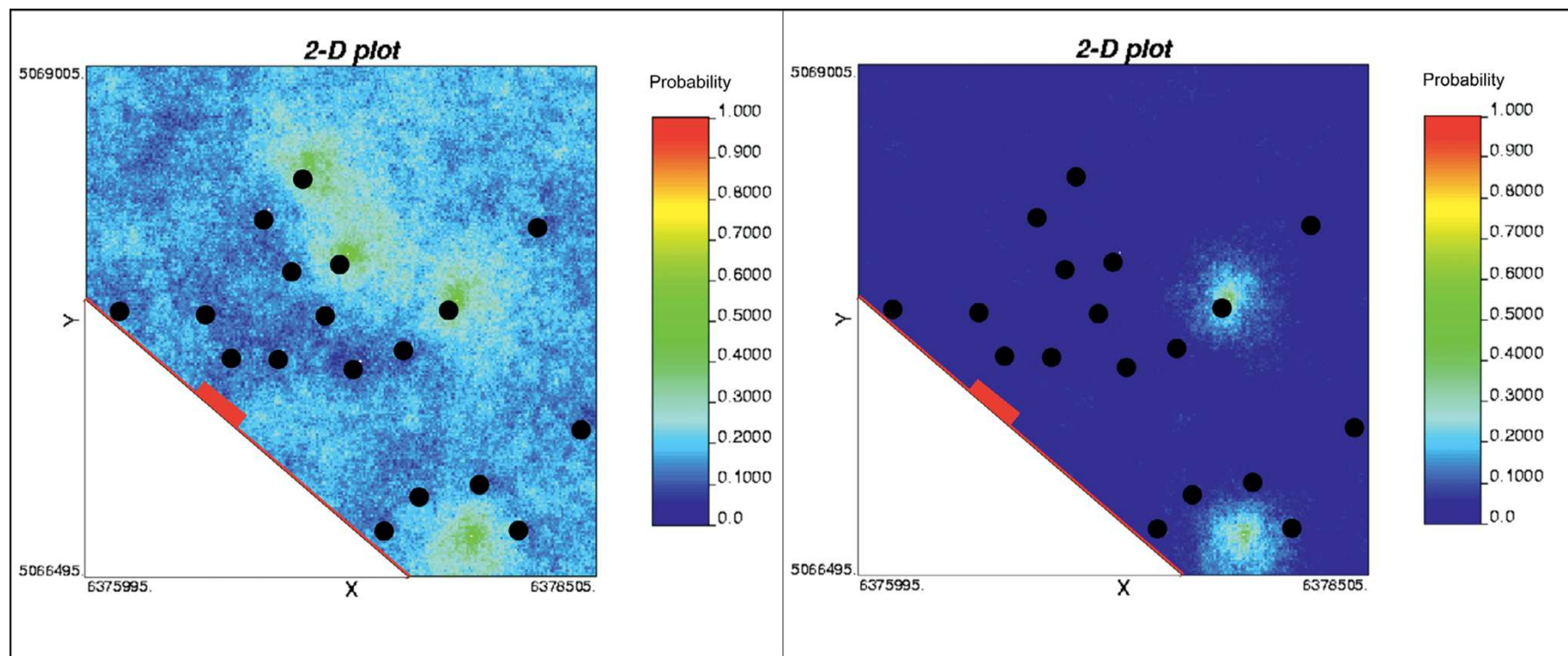
**Slika 9:** Karta debljina polja Kloštar (ležište T) dobivena SGS-om; 1. realizacija lijevo, 100. desno; vrijednosti 0-30 m (iz Novak Zelenika i Malvić, 2013)



**Slika 10:** Karta dubina polja Kloštar (ležište T) dobivena SGS-om; 1. realizacija lijevo, 100. desno; vrijednosti 600-1100 m (iz Novak Zelenika i Malvić, 2013)



**Slika 11:** Karta vjerojatnosti debljina polja Kloštar (ležište T) dobivena SIS-om; vjerojatnosti za graničnu vrijednost 5 metara lijevo; 9 metara desno (iz Novak Zelenika i Malvić, 2013)

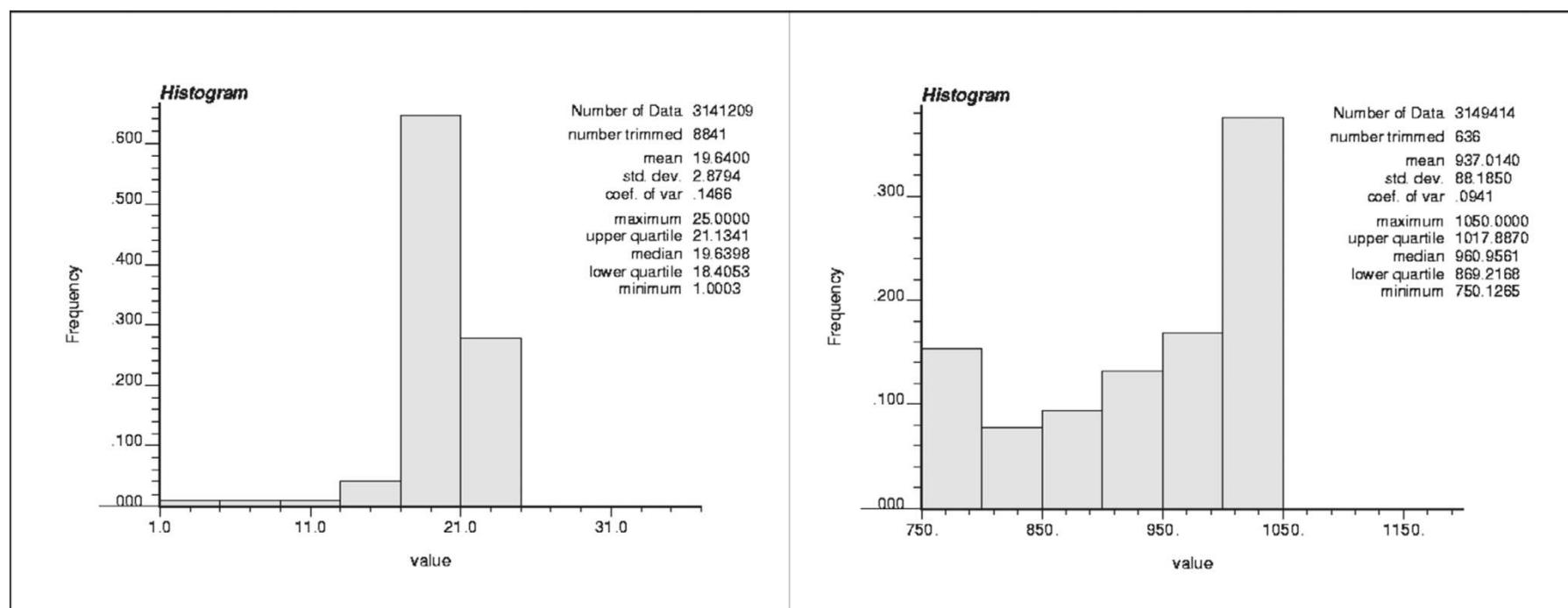


**Slika 12:** Karta vjerojatnosti debljina polja Kloštar (ležište T) dobivena SIS-om; vjerojatnosti za graničnu vrijednost 13 metara lijevo; 17 metara desno (iz Novak Zelenika i Malvić, 2013)

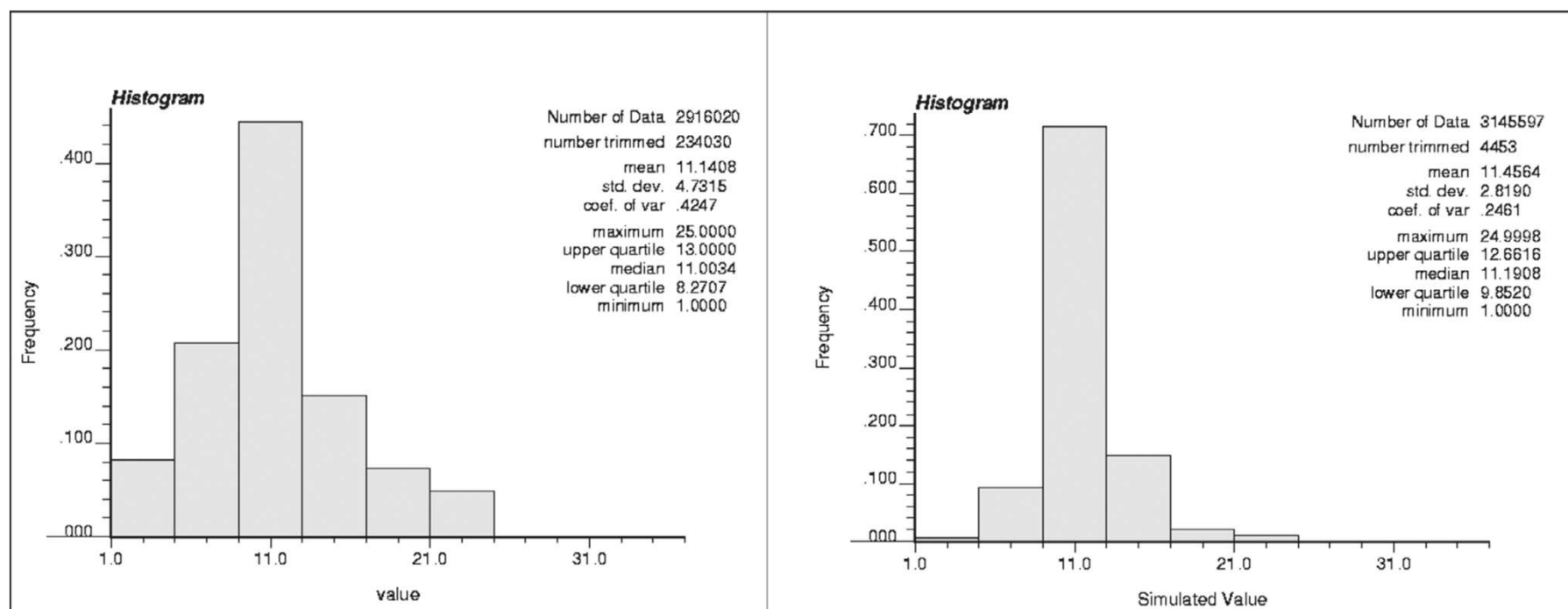


Rezultati stohastičkih simulacija nude jednu statističku pogodnost. Ako se svi kartirani podatci smatraju točnima iz njih je moguće generirati znatno bolji, pouzdaniji, histogram negoli iz izvornog skupa mjerenja (koji je malobrojan).

S takvim prikazima znatno je lakše prepoznati ima li kartirana varijabla normalnu razdiobu što je vrlo važno svojstvo. Također iz većeg skupa podataka prikupljenih kartiranjem može se izraditi znatno pouzdaniji Q-Q plot ili izračunati formalni test normalne razdiobe.



**Slika 13:** Histogrami izračunat iz SGS-a za šupljikavost (lijevo) i dubinu (desno) (iz Novak Zelenika i Malvić, 2013)



**Slika 14:** Histogrami izračunat za debljinu iz SGS-a (lijevo) i SIS-a (desno) (iz Novak Zelenika i Malvić, 2013)



Stohastički pristup kartiranju pješčenjaka posebno je koristan kada je broj podataka u izvornom skupu relativno „malen”, poput njih 18-23 na kojima se temelji ova analiza.

Prvi dobitak je odstranjivanje ili ublažavanje efekta koncentričnih kružnica („bull-eyes”), a u usporedbi s istom pojavom na kartama dobivenim determinističkom linearnom interpolacijom.

Drugo, moguće je izračunati „umjetni” histogram koji je zatim znatno pouzdanije statistički analizirati. Tu je pretpostavka da su simulirane vrijednosti prihvatljivo točne, što je ujedno ekspertna pretpostavka.



Takav pristup svakako je koristan kod kartiranja strukturnih varijabli kojima su određeni taložni okoliši klastičnog detritusa (poput dubina) ili fizikalnih svojstava (poput šupljikavosti).

Indikatorski pristup, kao dodatna opcija unutar stohastičke analize, može pružiti jasniji uvid u morfologiju proizašlu iz taložnog okoliša, npr. analiza varijable debljine. Drugo korisno svojstvo indikatora je odabir samo određenih vrijednosti koje će biti prikazane kartom.

Na taj način ocrtavana su samo područja veće vrijednosti od neke granične (npr. debljine), prikazujući u svakoj ćeliji mreže vjerojatnost da će vrijednost unutar nje zaista biti veća od granične vrijednosti.

Sama vjerojatnost posljedica je kreiranja niza (recimo 100-tinu realizacija) i pregleda u koliko njih je zaista ispunjen uvjet vrijednosti veće od granične.

# Istraživanje distribucije klastičnog nevezanog detritusa rijeke Save (holocen)



Odabrana je klasična statistička studija na uzorcima nevezanih klastita taloženih uz stalno korito rijeke Save (krovina zagrebačkog vodonosnika) na 6 smjesta (5 u Zagrebu, 1 u Sisku). Prikazuje korisnost uporabe histogramске analize kod interpretacije riječnog (paleo)okoliša i opisivanja dominantnog detritusa.

Istraženo je oko 50 km toka, od Zaprešića do Siska. Uočena je dominacija pjeskovite frakcije, uz pravilne varijacije sitno i srednjozrnatog pijeska. Srednjozrnatog je više u zagrebačkom, sitnozrnatog u sisačkom području, kada se tok rijeke Save umiruje. Također srednjozrnatu detritus unutar Zagreba raste prema istoku, jer se osjeća posljedica regulacije toka rijeke Save unutar gradskog područja.



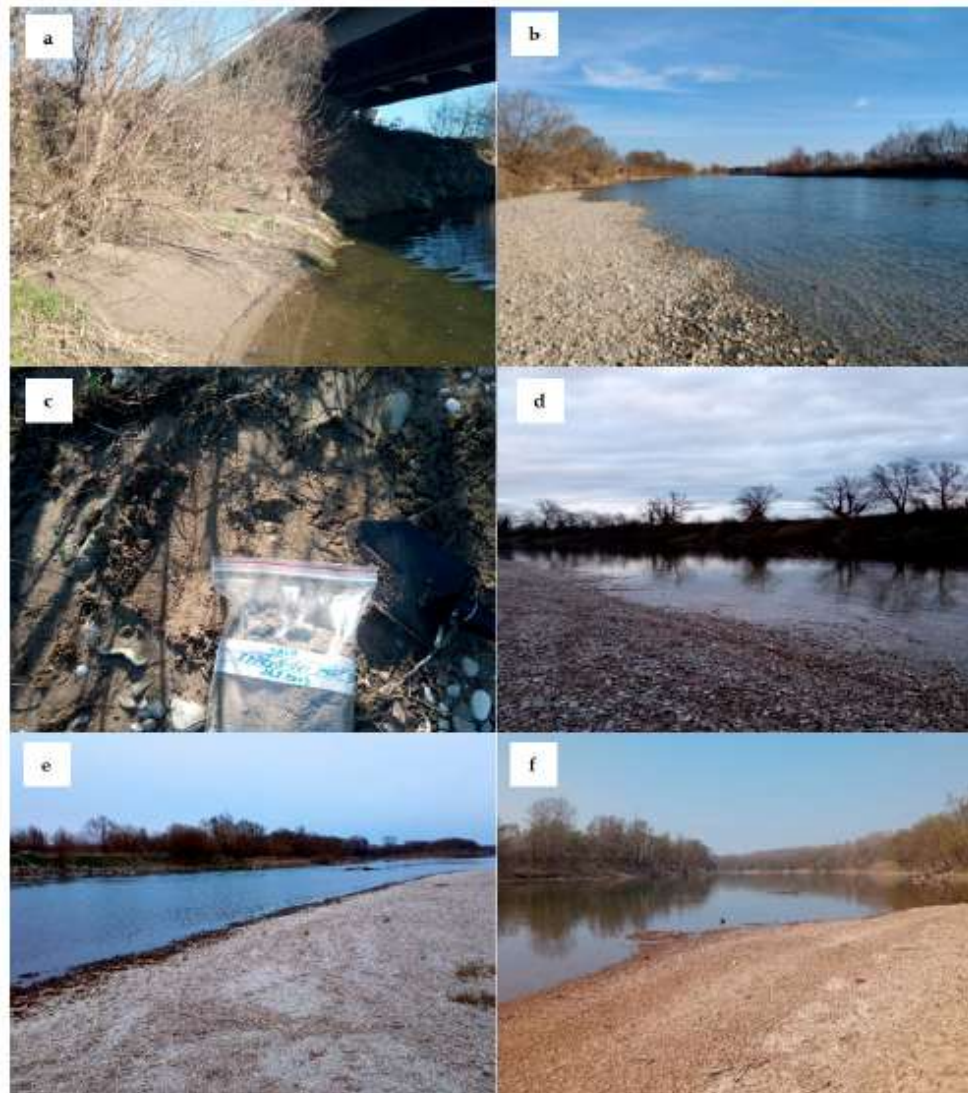
Po mineralnom sastavu pijesci su uglavnom karbonatnog podrijetla s ishodištem u Istočnim Alpama i (manji dio) lokalno Medvednici i Samoborskom gorju.

Prema središtu i istoku Zagreba raste siliciklastična komponenta, jer se povećava utjecaj Medvednice kao izvorišta detritusa. Međutim na istoku analiziranog područja, kod Siska, povećanje siliciklastične komponente pripisano je utjecaju Kupe, kao pritoku Save.

Prikazani histogrami su izvorni doprinos u interpretaciji okoliša rijeke Save i prikazuju uporabu klasične statistike kod interpretacije veličine frakcije nevezanih tala u holocenskim riječnim okolišima.

Samples		Coordinates in HTRS96/TM	
Field Mark	Lab Number	Easting	Northing
1—Podsused Bridge	9451	448,079.93	5,075,186.58
2—Jankomir Bridge	9452	449,924.19	5,072,626.22
3—Zaprešić Bridge	9453	447,162.77	5,076,738.34
4—Homeland Bridge	9454	465,329.62	5,068,919.41
5—Ikea	9455	471,386.61	5,071,575.00
6—Sisak	9493	496,688.65	5,032,685.95

**Tablica 1:** *Smjestišta na kojima su uzeti uzorci na sprudovima i obali rijeke Save (iz Barudžija et al., 2024)*



**Slika 15:** Mjesta uzorkovanja na obali Save - a) Podsusedski most, b) Jankomirski most, c) Zaprešički most, d) Domovinski most, e) centar Ikea, f) Sisak (iz Barudžija et al., 2024)



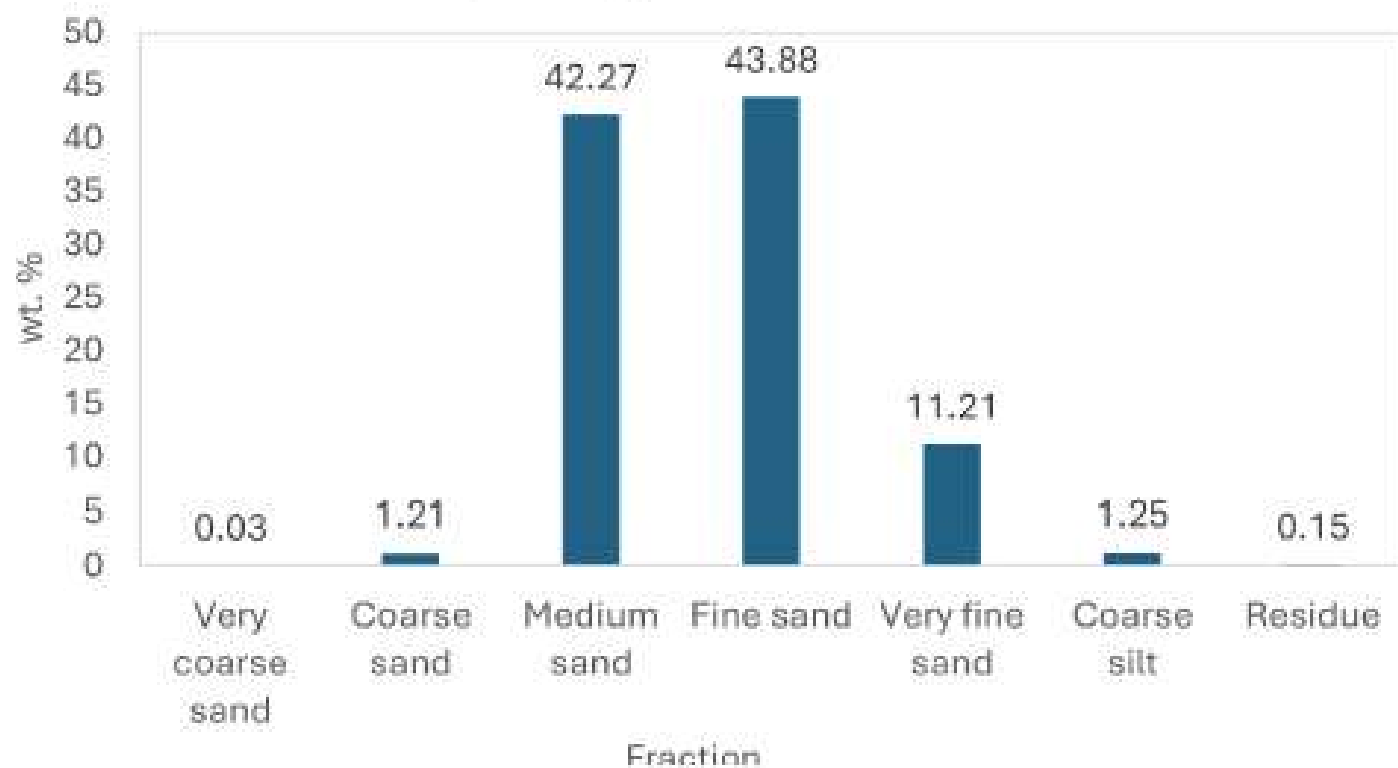
---

Prikupljeni uzorci analizirani su granulometrijski i mineraloški. Granulometrija je izračunata suhim prosijavanjem, laserom, te magnetskom i/ili separacijom teškom tekućinom (fazom).

Na tako dobivenim frakcijama mineraloški sastav je određen stereoskopskim mikroskopom, a dodatno je dominantna mineralogija ispitana difrakcijom x-zraka na praškastom uzorku.

a

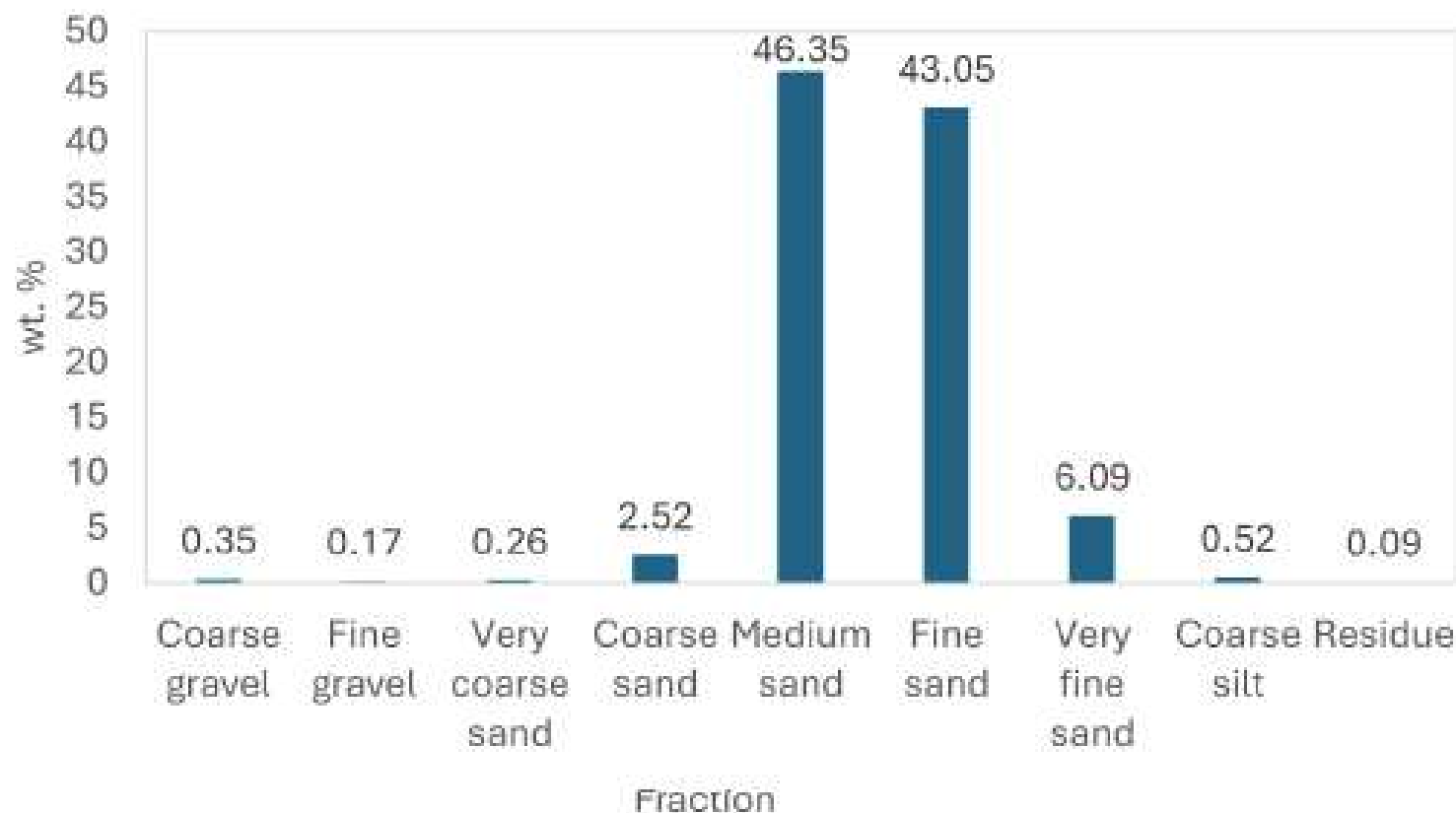
Histogram of grain size distribution



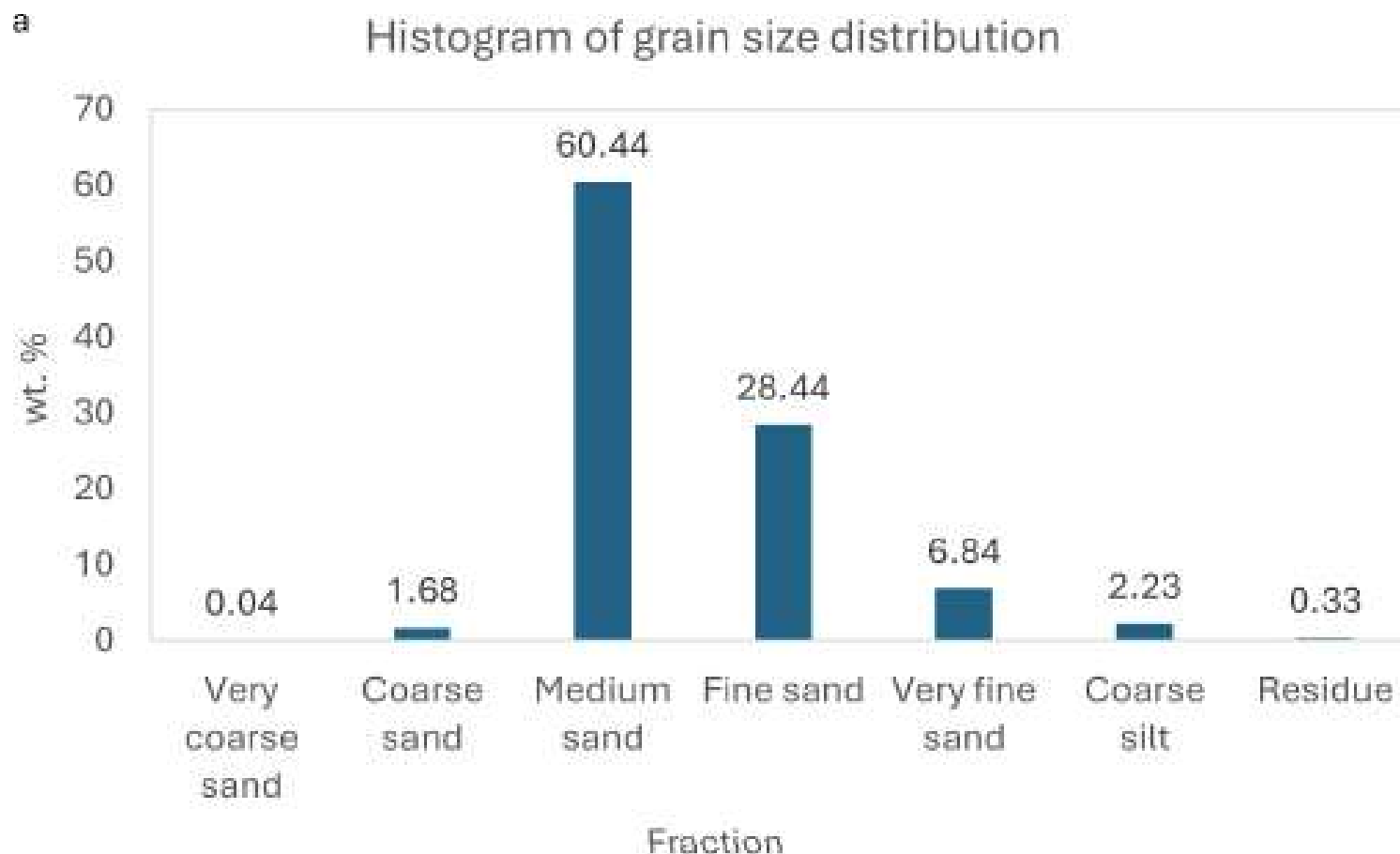
**Slika 16:** Histogram razdiobe veličine zrna (detritusa) kod Zaprešića (iz Barudžija et al., 2024)

a

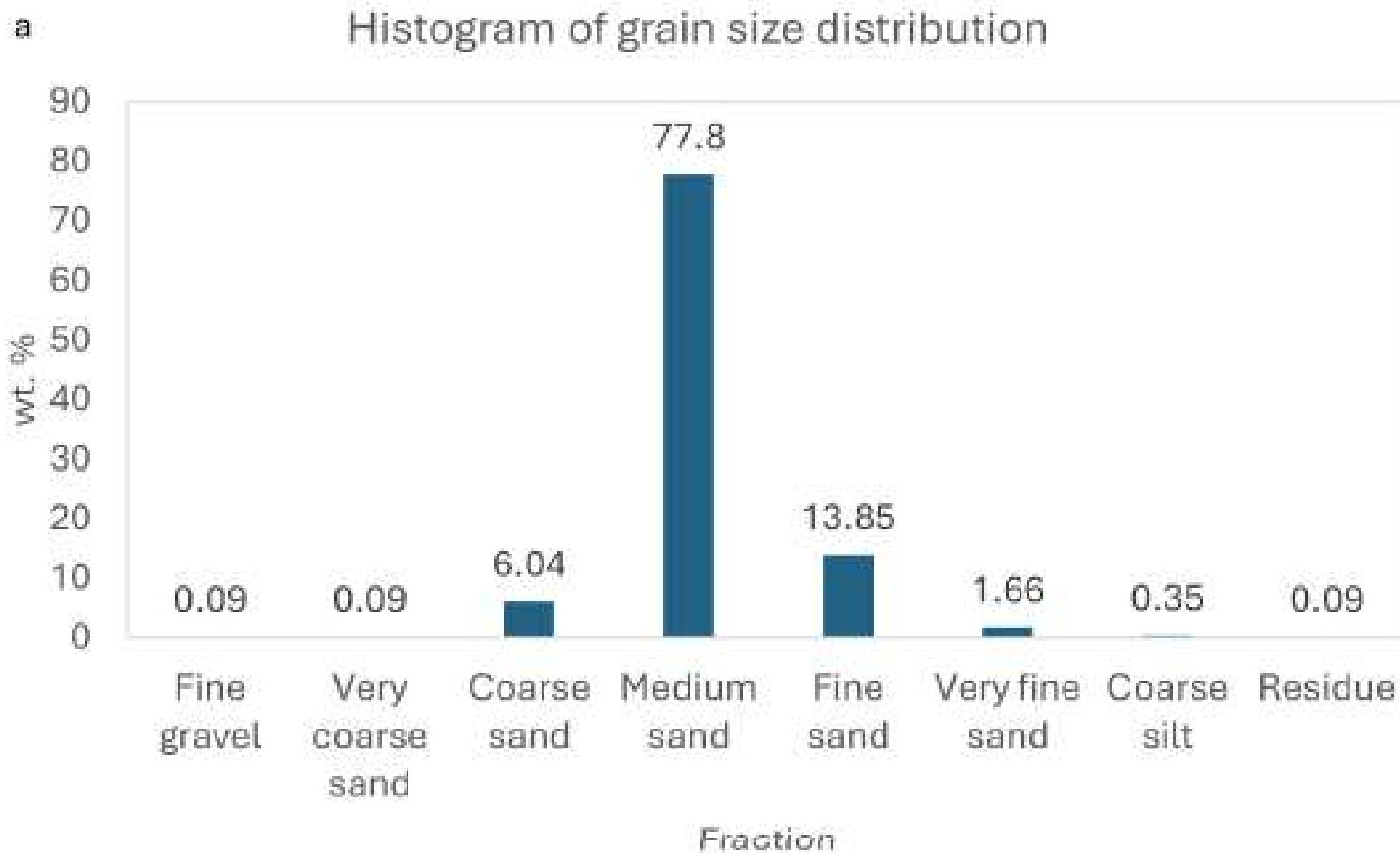
Histogram of grain size distribution



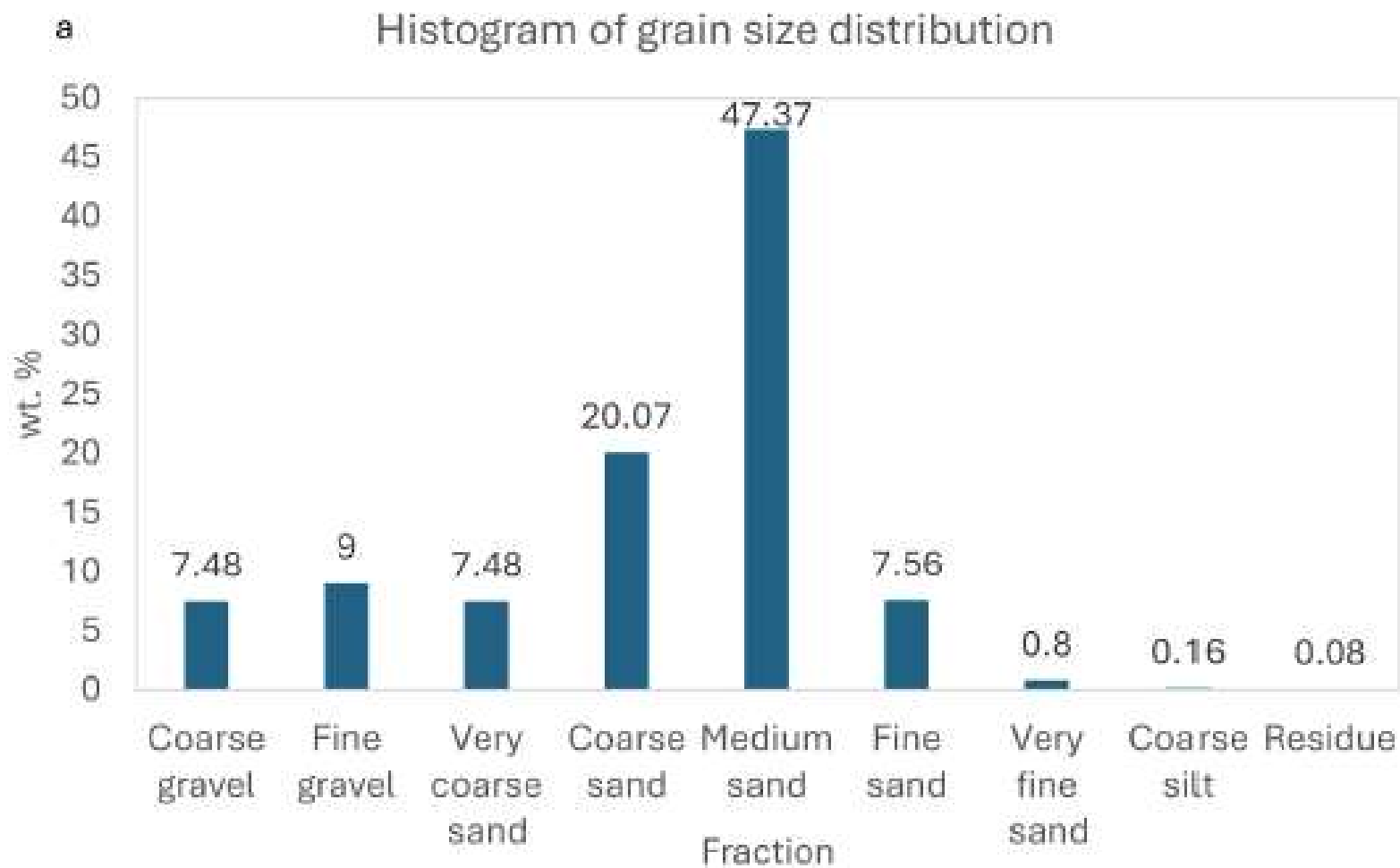
**Slika 17:** Histogram razdiobe veličine zrna (detritusa) kod Podsusedskog mosta (iz Barudžija et al., 2024)



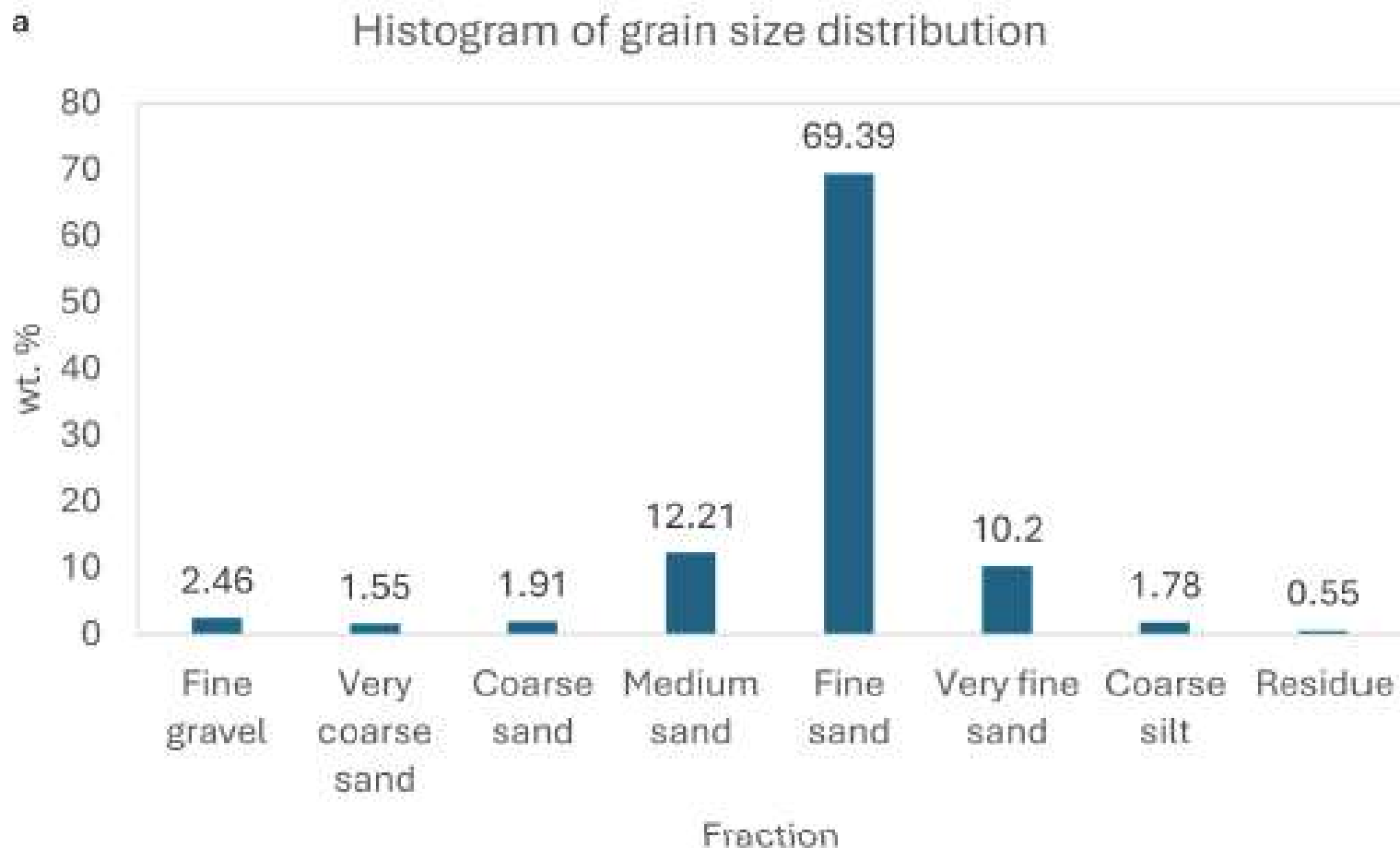
**Slika 18:** Histogram razdiobe veličine zrna (detritusa) kod Jankomirskog mosta (iz Barudžija et al., 2024)



**Slika 19:** Histogram razdiobe veličine zrna (detritusa) kod Domovinskog mosta (iz Barudžija et al., 2024)



**Slika 20:** Histogram razdiobe veličine zrna (detritusa) kod centra Ikea (iz Barudžija et al., 2024)



**Slika 21:** Histogram razdiobe veličine zrna (detritusa) kod Siska (iz Barudžija et al., 2024)



Prikazani histogrami pomogli su interpretirati okoliše taloženja pijeska u koritu i na obali Save u dužini toka od gotovo 50 km. Nadopunili su ranije studije te potvrdili dominaciju srednjozrnatog pijeska u središnjem i istočnom dijelu zagrebačke Save, a kao posljedice regulacije njezina toka, tj. urbanizacije. Nešto zapadnije udio sitnozrnate frakcije je veći, a to posebno vrijedi dalje na istoku kod Siska, kada ta frakcija dominira. Veliku ulogu u tomu ima i ušće rijeke Kupe.

Glede mineralošskog sastava potvrđeno je kako je lokalni utjecaj okolnih gora (Medvednice i Samoborske gore) veći u donjem dijelu zagrebačkog dijela toka. To je prepoznato u porastu siliciklastične komponente detritusa unutar dominantno karbonatne (alpske) osnove pijesaka. Znatno dalje na istoku, kod Siska, porast siliciklastičnog udjela pripisan je rijeci Kupi, a sveukupni porast sitnozrnatog detritusa rezultat je opadanja energije cjelokupnog riječnog sustava.

# Izračun volumena taložina (nevezanih i vezanih)



Svi praktični pristupi procjeni površina i volumena struktura u sebi sadrže aproksimacijske metode, odnosno funkcije kojima se postiže odgovarajući prostorni prikaz ili numerički izračun. Kod izračuna površina, kao osnove i za procjenu volumena omeđenog njima, numerička tehnika sastoji se od izračuna konačnog integrala

$$\int_a^b f(x) dx$$

Time se zatvoreni interval realnih brojeva ispod krivulje podijeli na konačno mnogo dijelova. Takva numerička integracija se temelji na polinomnim aproksimacijama, vrlo često Lagrangeovoj interpolacijskoj polinomnoj metodi koja je temelj za uporabu dviju čestih integracijskih metoda. To su trapezno i Simpsonovo pravilo, kao numeričke integracijske metode kojima se integralom aproksimira vrijednost  $f(x)$  u konačnom broju točaka označenih kao 'x'.

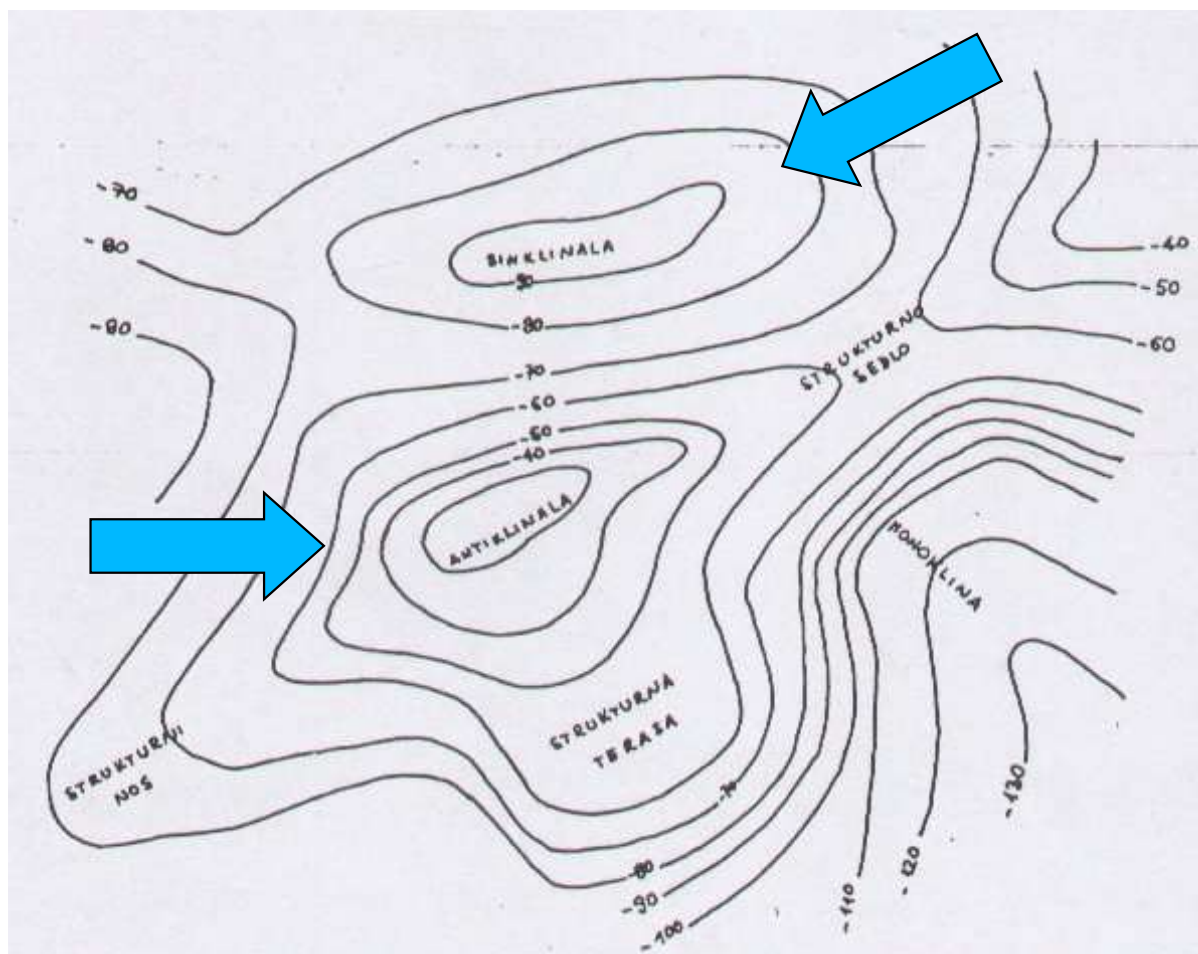


Obje metode se često primjenjuju za izračune volumena pravilnih geoloških struktura, najčešće antiklinala, gdje su volumeni često povezani s pornim prostorom dostupnim za nakupljanje fluida.

Nadalje, te jednadžbe mogu poslužiti i za izračun kod manje ili više nepravilnih struktura, kada volumen ne može biti računat analitičkom integracijom.

Također, osim za izračun nepravilnih antiklinala, iste metode mogu uporabiti i za proračun volumena (nepravilnih) sinklinala, kao antipodnih struktura.

Ujedno su spušteni prostori često strukture u kojima se mogu istaložiti nevezani klastiti, ponekad od eksploatacijskog interesa, poput glina, ali i pijeska i šljunka, ovisno o smjeru donosa i količini materijala te obliku podine.



*Slika 22: Primjeri struktura čiji je volumen moguće aproksimirati numeričkim integriranjem*



Izračun volumena 'V' nekoga tijela čije se granice pružaju od 'x=a' do 'x=b' uporabom određenog integrala  $V = \int_a^b A(x)dx$

na površini 'A(x)' koja je ujedno presjek ravnine paralelne s bazom tijela zahtjeva da je u svakoj točki poznat  $x \in [a, b]$

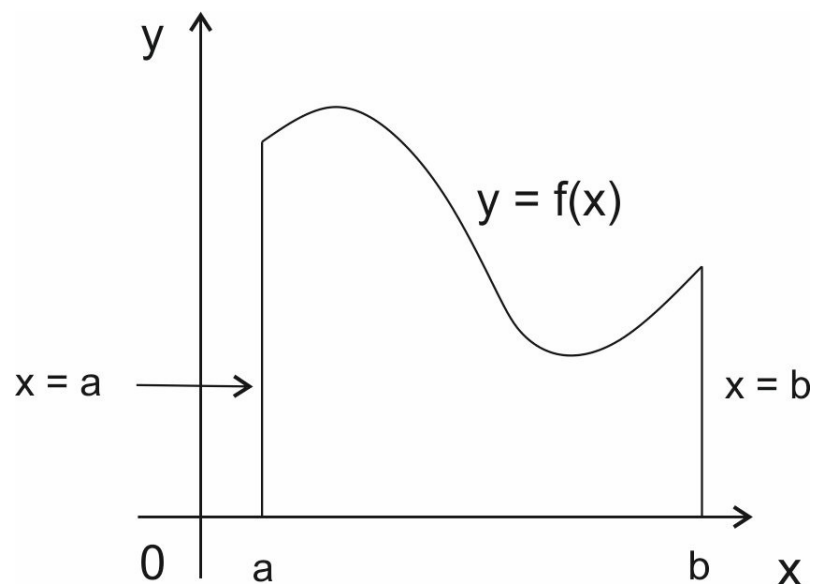
Često je integrand 'A' određen tabličnim vrijednostima, a u tom slučaju približna vrijednost određenog integrala može se izračunati numerički bilo jednadžbama ili uporabom planimetra kao mehaničke naprave za mjerenje zatvorenih površina.

## Trapezno pravilo

Želi se odrediti integral  $\int_a^b f(x) dx$

te ako je funkcija pozitivna i kontinuirana integral predstavlja površinu omeđenu krivuljom  $y = f(x)$

te linijama  $y = 0, x = a, x = b$



**Slika 23:** Procjena volumena zbrajanjem volumena niza malih valjaka na intervalu  $a-b$  (iz Malvić et al., 2014)

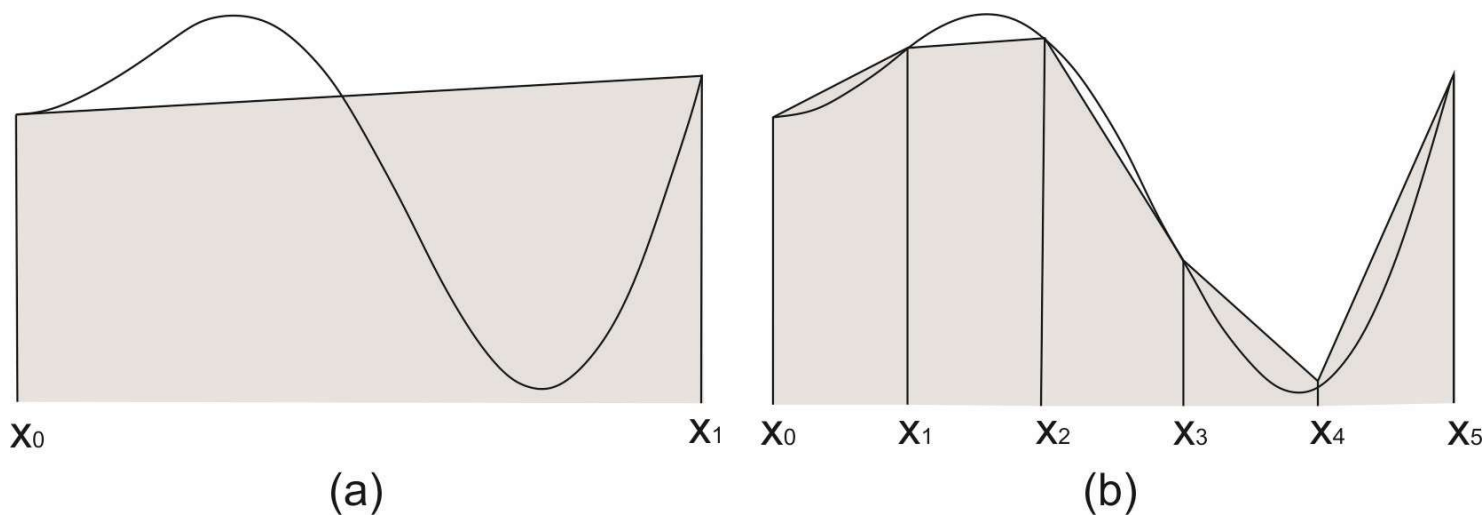
Prva aproksimacija može se napraviti tako da se odsječak krivulje  $y=f(x)$  između  $x=a$  i  $x=b$  zamijeni ravnom crtom, tj. polinomom 1. stupnja. Tada se površina aproksimira trapezom s vrhovima u točkama  $(a,0)$ ,  $(b,0)$ ,  $(a,f(a))$  i  $(b,f(b))$  te vrijedi:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}(b-a)(f(a) + f(b)).$$

Bolja točnost postiže se podjelom  $[a, b]$  u  $n$  podintervala te ponovnom uporabom trapeznog pravila u svakom podintervalu.

Ako se primjeni jednolika raspodjela gdje vrijedi  $a=x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n=b$  uz korak  $h=(b-a)/n$  dobiva se sljedeća ukupna aproksimacija:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_{trapez} = \frac{h}{2} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right].$$

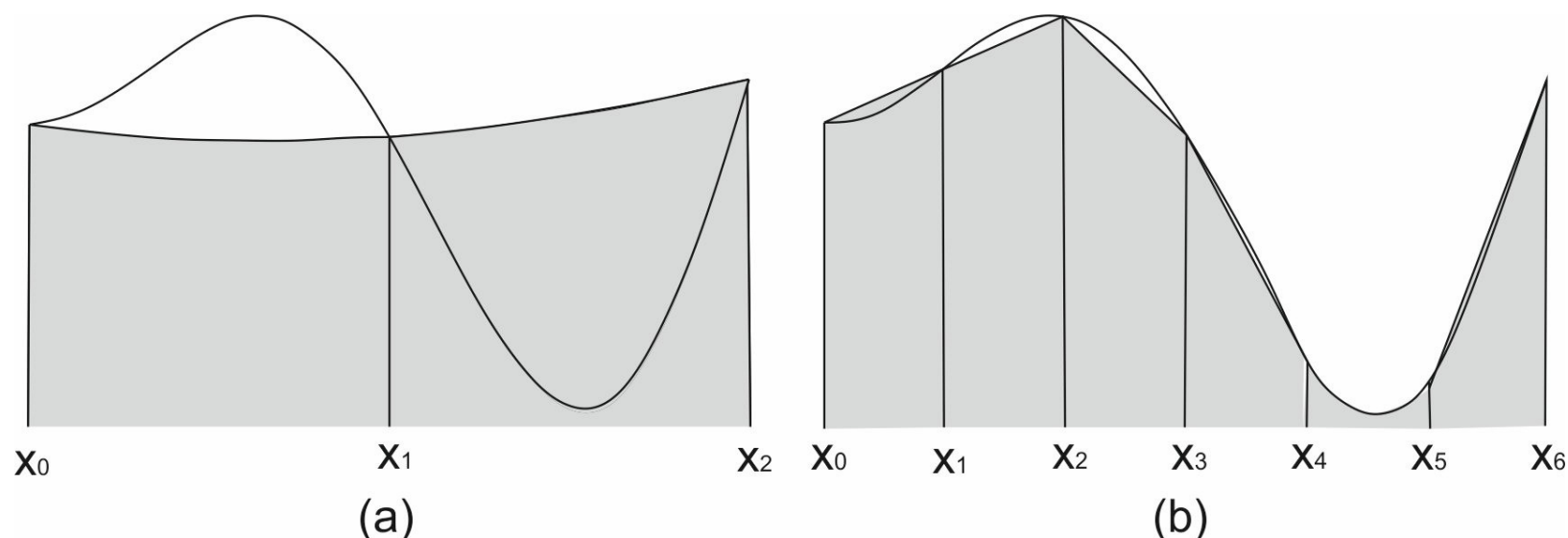


**Slika 24:** Trapezno pravilo s jednim (pod)intervalom (a) i s pet podintervala (b) (iz Malvić et al., 2014)

## Simpsonovo pravilo

Razlikuje se od trapeznog pravila u stupnju aproksimacijskog polinoma. Tu se vrijednost integrala  $\int_a^b f(x) dx$  aproksimira ( $y = f(x)$ ) parabolom, tj. polinomom 2. stupnja koji prolazi kroz sljedeće točke  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$ ,  $(c, f(c))$  i vrijedi  $c = \frac{1}{2}(a + b)$ .

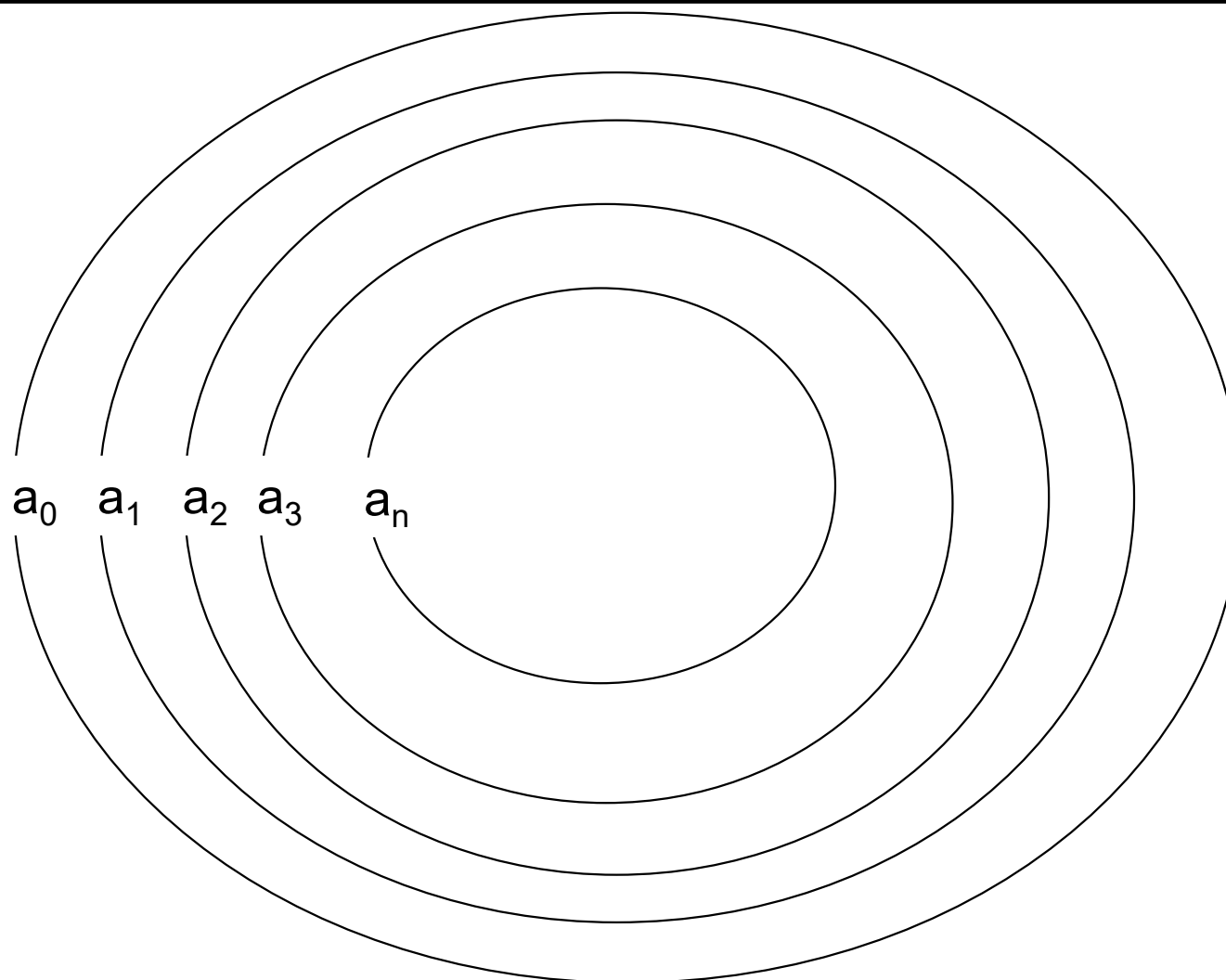
$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_{Simp} = \frac{h}{3} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) \right].$$



**Slika 25:** Simpsonovo pravilo s dva podintervala (a) i s  $2n = 6$  podintervala (b) (iz Malvić et al., 2014)

Simpsonovo pravilo može se primijeniti samo u slučaju neparnog broja odsječaka, tj. parnog broja izopaha/izohora. U slučaju parnog broja odsječaka zadnji se računa trapeznim pravilom (jer ne postoji oblik Simpsonova jednadžbe za paran broj odsječaka).

Također kod manje od pet odsječaka raspis Simpsonove formule nije potpun pa ju ne treba koristiti, već isključivo trapezno pravilo.



**Slika 26:** *Primjer (idealizirane) strukture čiji je volumen moguće izračunati određenim integralom*

Gdje su:

$a_0, a_1 \dots a_n$  – površine omeđene pojedinim izopahama/izohorama (linijama jednake prave/pravidne debljine);

$h$  – ekvidistancija na karti debljina;

Volumen po Simpsonovoj formuli računa se prema izrazu:

$$V_s = \frac{h}{3} (a_0 + 4a_1 + 2a_2 + 4a_3 + K + 2a_{n-2} + 4a_{n-1} + a_n)$$

odnosno za ovaj slučaj:

$$V_s = (h/3) \times (a_0 + 4a_1 + 2a_2 + 4a_3 + a_4)$$

Trapeznim pravilom se provjerava izračuna Simpsonom (dopuštena razlika do 20 %)

$$V_t = h \left( \frac{a_0}{2} + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2} \right)$$

Vrh (“kapa”) iznad n-te izohore/izopahe računa se po sfernoj i piramidalnoj jednadžbi, uzimajući srednju vrijednost rezultata tih dviju jednadžbi.

$$V_1' = \frac{h_n \cdot a_n}{3} \quad V_2' = \frac{h_n^3 \cdot \pi}{6} + \frac{a_n \cdot h_n}{2} \quad V' = \frac{V_1' + V_2'}{2}$$

$a_n$  – površina koju zatvara zadnja izopaha/izohora;

$h_n$  - debljina iznad zadnje izopahe/izohore ili visina kape;

$V_1'$  – volumen piramidalne jednadžbe;

$V_2'$  – volumen sferne jednadžbe,

$V'$  – volumen kape.

Ukupni volumen strukture tada je  $V_s + V'$ .

# Primjena analize glavnih komponenti za analizu sličnosti valutica (kvartar)



Analiza glavnih komponenti (*Principal Component Analysis, PCA*) robusna je metoda koja daje rezultat čak i za podatke koji ne iskazuju jake ili bilo kakve vidljive veze. Zato treba biti pozorno postavljena i primijenjena, kako se ne bi donosili besmisleni zaključci.

To posebice vrijedi u geoznanostima gdje izvorni kompozitni podatci za multivarijatnu statistiku (poput *PCA*), svojim inherentnim svojstvima mogu dovesti do potpuno krivih rezultata i interpretacija.

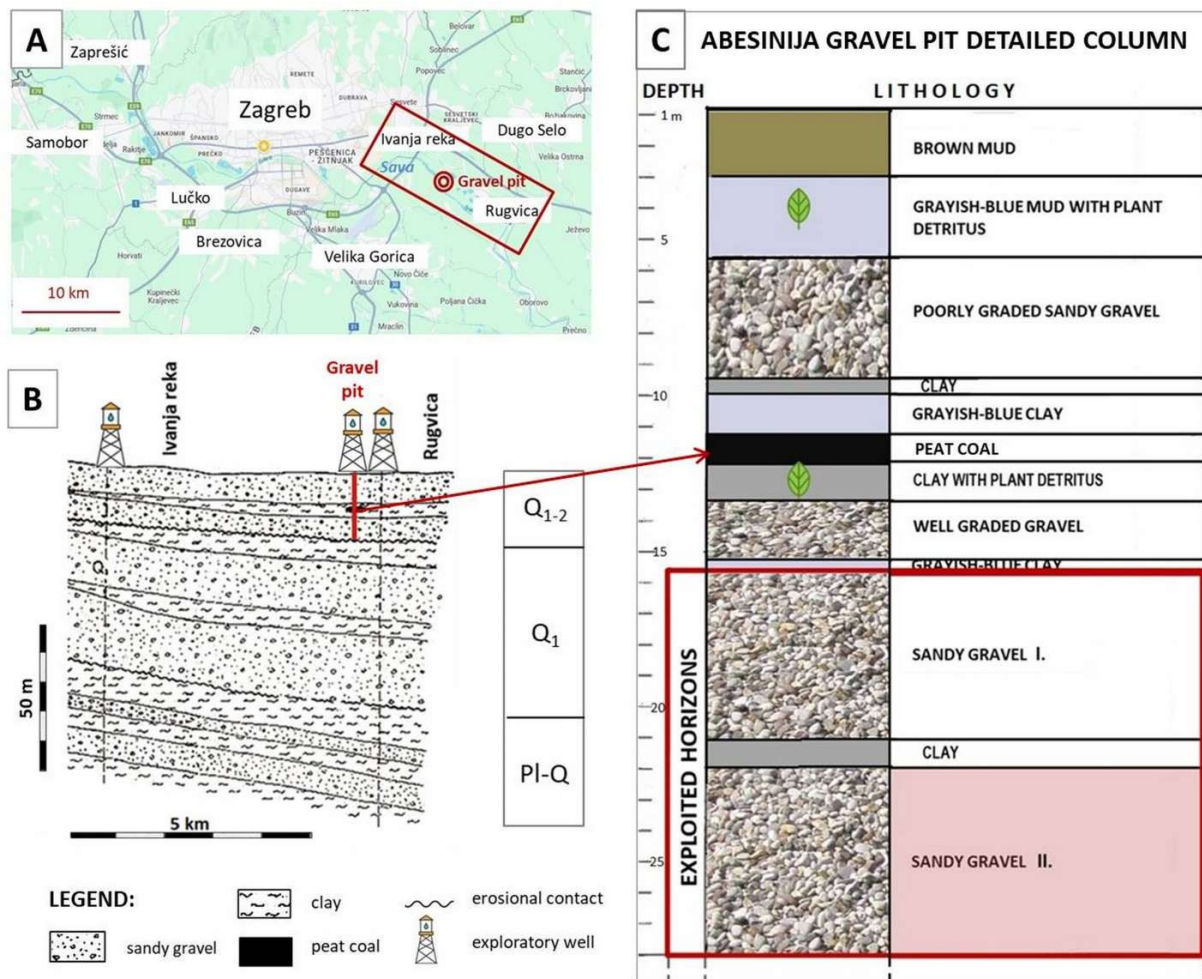
Jedan od pokazatelja prevelike osjetljivosti (tj. varijabilnosti) ulaznih podataka unutar pojedinih metoda može biti praćenje kovarijance, koja se micanjem ili dodavanjem nove vrijednosti u nekoj varijabli može potpuno promijeniti. Najčešći uzrok tomu je premali skup mjerenja. Sljedeći uzrok je nespojivost fizikalnih svojstava varijabli koje se zajednički promatraju multivarijatnom analizom.



---

U ovom primjeru analiza glavnih komponenti uporabljena je za traženje sličnosti (podrijetla) između triju skupina karbonatnih valutica označenih kao V1, V2 i V3, a koje su razlikovane po boji (sive, bijele i crne).

Polazna pretpostavka bila je kako valutice te tri skupine imaju ishodište u različitim (erozijskim) područjima pa time imaju i drugačiju transportnu i taložnu povijest.



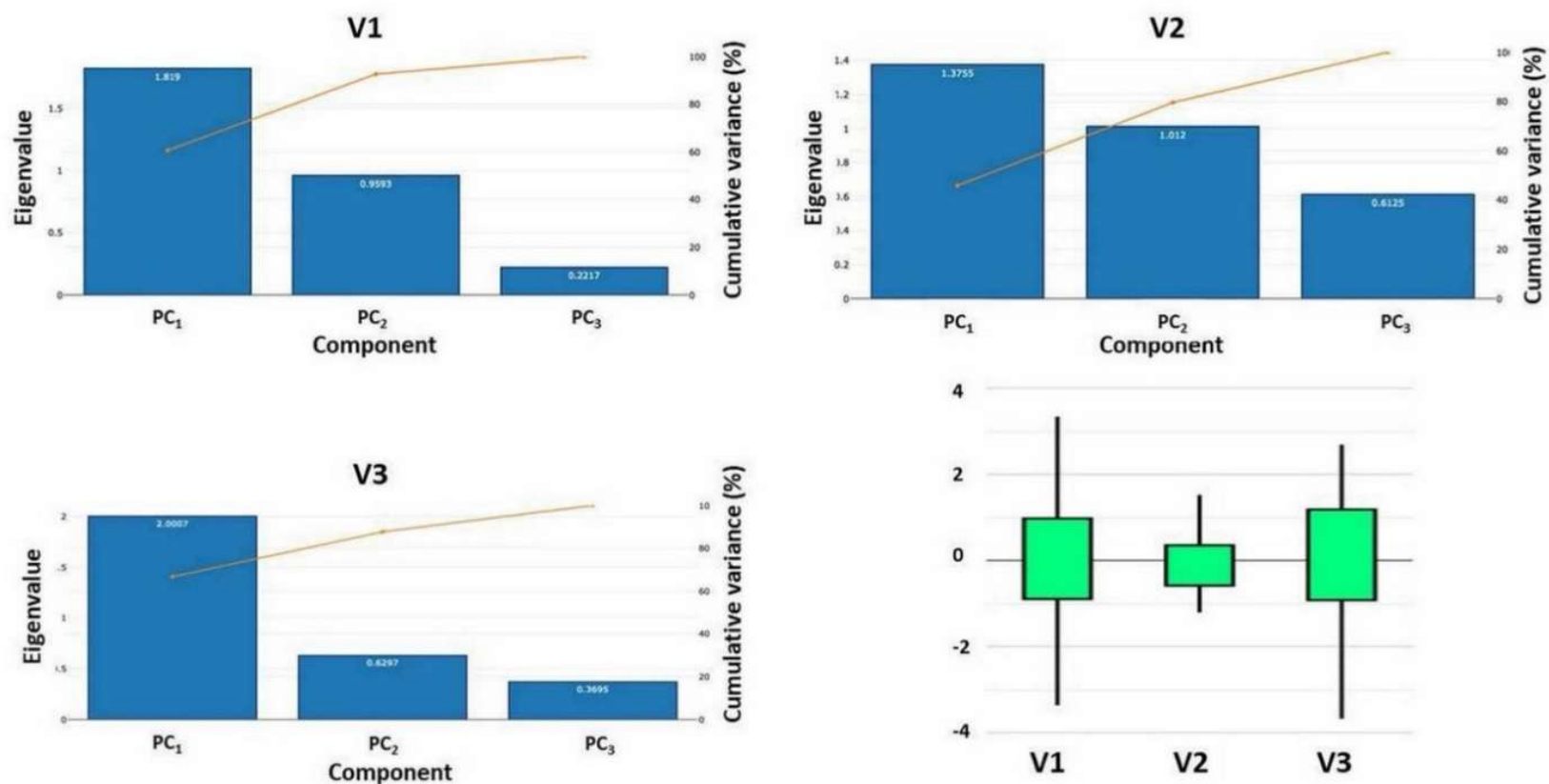
**Slika 27:** Stratigrafski položaj istraživanih (nevezanih) taložina (iz Sremac et al., 2024)



Analizom glavnih komponenti stvorene su umjetne vrijednosti za svaku od tri skupine. Takvi umjetni podatci kreirani su iz izvornih geometrijskih vrijednosti valutica izmjerenih na njihovim trima osima (dimenzije po x, y, z osi).

Sva tri umjetno kreirana skupa podataka iskazala su slične vrijednosti varijance i srednje vrijednosti, kao što i sva tri skupa (grafički) imaju približno podjednak udjel varijabli V1, V2 i V3 unutar ukupne varijance, posebice V1 i V3.

To znači kako se polaznu pretpostavka (o različitim ishodištima) može statistički odbaciti te ona može biti dokazana eventualno samo litološkim i paleontološkim analizama.



**Slika 28:** Rezultati primjene analize glavnih komponenti za sve tri vrste karbonatnih valutica – sive V1, bijele V2 i crne V3 (iz Sremac et al., 2024)

# ZAKLJUČAK



Geomatematika je znanstveno polje koje povezuje matematiku i geoznanosti na način primjene odabranih matematičkih algoritama i testova na podacima iz odabrane geoznanosti.

Veliko područje njezine primjene, posebice u geografiji, može biti kartiranje bilo površinskih ili dubinskih varijabli.

Kartiranje tim metodama izvodi se uglavnom linearnim interpolacijskim metodama, ali i moguće je uporabiti i neuronske algoritme.

Uz determinističke rezultate postoji i cijelo područje uporabe stohastičkih simulacija za kartiranja tih istih, ili drugih, varijabli.



---

Nadalje, postoji niz integralnih aproksimacija koje omogućuju izračun volumena (zatvorenih ili otvorenih) struktura. Njihova primjena u geomorfologija može biti velika.

Niz mjerenja moguće je statistički ispitati deskriptivnom statistikom, formalnim testovima razdioba ili pak multivarijatnom statistikom. Svaka od njih pružit će uvid u interpretacije koje mogu nadopuniti geografske postavke i hipoteze. Njihova primjena zahtjeva stručnu ekspertizu kako kod odabira samih varijabli tako i u ocjeni njihove moguće povezanosti (kod multivarijatne statistike).

Numeričke analize je teže primijeniti što je povijest oblikovanja odabrane varijable duža i/ili složenija. Tada je potrebno takve analize koristiti tek kao pomoć kod drugih vrsta uzorkovanja i laboratorijskih mjerenja, poput određivanja litologije, paleontološkog sastava, geometrije itsl.

# REFERENCIJE



Barudžija, U.; Blatančić, M.; Malvić T. Grain Size Distribution and Provenance of Holocene Sand from the Sava River (Zagreb, Croatia). // Geosciences. 14/7 (2024): 188.

Futivić, I.; Pleić, M. 3D Seismic Interpretation of the Beničanci Oil Field. // Naftaplin, 1/19 (2002), str. 17-25.

Lapaine, M.; Malvić, T. Geomathematics Between Mathematics and Geosciences. // Annual ... of the Croatian Academy of Engineering. 12(2009), str. 51–67.

Malvić, T.; Đureković, M. Application of methods: Inverse distance weighting, ordinary kriging and collocated cokriging in porosity evaluation, and comparison of results on the Beničanci and Stari Gradac fields in Croatia. // Nafta, 9 (2003), str. 331-340.

Malvić, T.; Prskalo, S. Using of neural network in porosity prediction (Beničanci field) // XI. Congress of Hungarian Geomathematics (Rad je objavljen isključivo na "webu"). Segedin: Hungarian Geological Society, Geomathematical Section of the Hungarian Geological Society, 2007. str. Nema-x



Malvić, T.; Rajić, R.; Slavinić, P.; Zelenika, K.. Numerical integration in volume calculation of irregular anticlines. // Rudarsko-geološko-naftni zbornik. 29 (2014). str. 1-8.

Novak Zelenika, K.; Malvić, T.. Stochastic simulations of dependent geological variables in sandstone reservoirs of Neogene age: A case study of Kloštar Field, Sava Depression. // Geologia Croatica, 64/2 (2011), str. 173-183. <https://doi.org/10.4154/GC.2011.15>. Citirano 27.03.2026.

Sremac, J.; Velić, J.; Bošnjak, M.; Velić, I.; Bakrač, K.; Šimičević, A.; Malvić, T.; Fotović, D. Genesis of the Upper Pleistocene Gravel from the Abesinija Pit SE from Zagreb (Croatia). // Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia, 130/3 (2024), str. 613-631. <https://doi.org/10.54103/2039-4942/22533>.

# ZAHVALA



Ovo istraživanje dijelom je načinjeno u okviru NPOO projekta (unutar okvira programa Europske unije „Next Generation”) naslovljenog “Matematička istraživanja u geologiji” (akr. “Geomat”, engl. „ Mathematical researching in geology”). Projekt financira Europska unija. Voditelj je T. Malvić. Izvodi se na Rudarsko-geološko-naftnom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, gdje se vodi pod (internim) brojem 581100002.